

任意形平面骨組の非線形応力解析

正会員 藤 本 盛 久†
正会員 須 藤 福 三††
正会員 和 田 章†††

§ はじめに

鉄骨造高層ビルディングの出現にともなう、特に、激震時における安全性を確保するため、鉄骨骨組の弾塑性範囲の性状に関する研究が活発に行なわれている。

実際の高層ビルディングフレームにおいては、柱の軸力による応力が降伏軸力の0.4倍から0.7倍までに達していることもあり、降伏モーメントが軸力の増減にともなう大きく変動すること、各層の水平移動によって生ずる上記軸力による付加応力が無視できないこと、柱・はりにおいて塑性状態にある範囲は、材端だけでなく部材の中央部へも広がっているものであること、また、大変形になると、曲率 ϕ と撓み y の関係として通常用いている $\phi=y''$ の関係が厳密には成立しないことなど、考慮しなければならない問題は非常に多い。

これらの問題に対して歴大な研究が発表されているが巻末参考文献にそのうちの代表的なものを示してある。

本論文は、これらの研究成果を参考にして、最近特に発達し、非線形解析にも使われた*matrix代数を用いて、増分変位を、ポテンシャルエネルギーの停留原理にもとづき、歪エネルギーをすべて数値積分によって計算することによって決定する方法を提案し、任意形平面骨組に対する非線形解析を行なったものである。

構造力学の問題において非線形の要因となるものに次の2つがある。

第1は、構造材料の降伏現象による非線形(material nonlinearity)、第2は幾何学的非線形(geometric nonlinearity)といわれるもので、釣合方程式を考える際、構造物の変形による幾何学的な形の変化が無視出来ない時に起る問題である。

鋼材の応力と歪の関係は、実験によって確かめることが出来るが、その結果は複雑であり、例えば、圧縮、引張による繰返し履歴の場合、線形な関係をもっている部

† 東京工業大学工学部教授 工博

†† 株式会社日建設計 コンピュータ室長 工博

††† 株式会社日建設計 東京コンピュータ室 工修
(昭和46年4月9日日本稿受理・討論期限昭和47年2月末日)

* 例えば文献(18)~(20)参照.

** 例えば文献(17)参照.

分は図-1に示すように、最初の载荷に対して降伏応力度以内のときだけであり、ほとんどの場合は非線形の関係をもっている**。

このように複雑な応力-歪間の非線形現象をそのまま考慮しながら骨組の解析を行なう事は不可能なことではないが、本論文では応力歪の関係として、通常よく用いられている図-2に示す降伏点 σ_y の完全弾塑性型モデルを用いた。

第2の幾何学的非線形としては、例えば次に示したような問題がある。図-3(a)は普通のトラスであるが、(b)は幾何学的非線形を考慮しなければまったく剛性がないことになってしまう。図-4(a)は普通の梁の問題である。(b)の場合は軸力が変形を増大させる影響のあることは明らかであり、やはり幾何学的非線形を考慮しなければ解析が不可能である。これら両者とも、図-5に示すような、 $1\epsilon_x$ 以外に軸歪 $2\epsilon_x$ を考慮することによってある程度の非線形解析が可能である。

また、曲率と変位の関係も、単に、曲率を変位の二次微分で表わすのではなく、

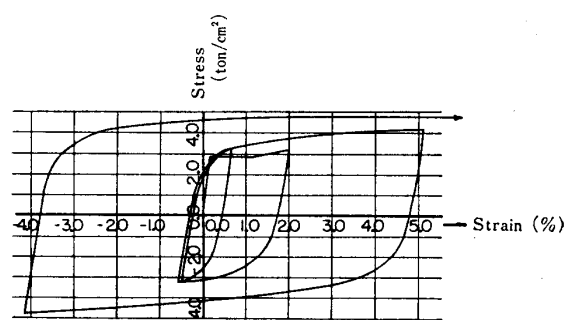


図-1

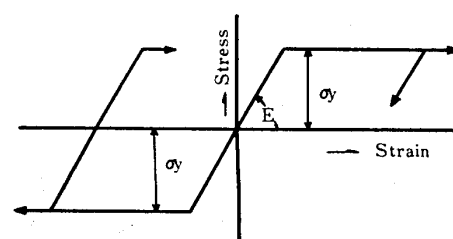


図-2



図-3

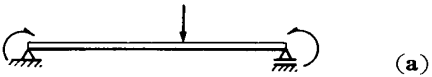


図-4

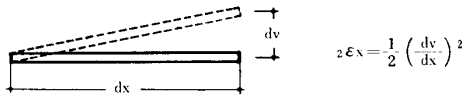
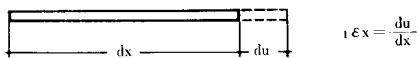


図-5

$$\phi = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}} \dots\dots\dots(1)$$

のような関係を用いることによってさらに正確な解析が可能になる。

以上に示したような2つの非線形関係を考慮した非線形計算は線形計算に比較して当然複雑になり、数学的な問題として処理しにくくなる。しかし、Step by step, iteration の方法を用い、1回1回の計算を線形計算に置き換え、それを積み重ねることによって解析することが出来るはずである。

この考えにもとづいて、全ポテンシャルエネルギーを増分変位の2次形式として表わすべく、すべての式を展開し、ポテンシャルエネルギーの停留原理にしたがい、その全ポテンシャルエネルギーの一次変分をゼロと置くことにより、増分変位に関する連立一次方程式を導びくことが出来る。この連立方程式を解くことが、すなわち1回1回の計算を線形化したことになるわけである。

しかし、全ポテンシャルエネルギーを上で説明した2つの非線形現象を考慮した上で、増分変位の2次形式として、すべて代数的に展開することはほとんど不可能であるが、膨大な記憶装置を持つ電子計算機を用いて、この全ポテンシャルエネルギーを徹底的に数値積分し、計算することによって、この困難な点を解決することが可

能になる。

本稿では、鉄骨による任意形平面骨組に対しての式を展開し、それに従って作成した電子計算機 (IBM 360 / I 75) のためのプログラムにより理論の妥当性を調べるため簡単な応用例を解析し、その結果を示した。

§1 構造物のモデル化

終りに載せた例題を見ても明らかなように本論文で用いた解析法は discrete element method といわれるものである。骨組をすべて線材で出来ているものとし、大変形を起こす可能性、歪が塑性域に入る可能性、歪が塑性域に入る可能性があると思われる部材は変形に対して十分に追随出来るように、細かく discrete element に分割しておくなくてはならない。

節点変位を未知量として解析する方法なので、各 State*の境界条件はすべて節点において与えなければならない。

§2 state S から state S+1 へ

ある境界条件**のもとに釣合っている状態 (state S) より、境界条件が変化した次の釣合状態 (state S+1) を求める方法 (step by step method) を、すでに述べたようにポテンシャルエネルギーの停留原理にもとづいて2次形式の変分原理を用いて展開する。

なお、ここで用いられている項の中には state S から state S+1の間には、変化量が微小であるから変化しないと仮定することによって2次形式に取り入れられている項がいくつかあるが、その影響で、1回の計算が終わった段階で全体が釣合っていない可能性がある。その不釣合を修正するために、境界条件を変化させずに同じ計算を繰返す方法 (iteration method) を用いて解を収束させている。ここで、step by step method と iteration method との違いは、境界条件を段階的に変化させながら計算を行なうか、それを一定にしておきながら計算を行ない解を収束させるかの違いであり、根本的な理論はまったく同じである。ゆえに、この計算過程において一つ一つ次の状態へ (state S から state S+1 へ) 進んで行く方法が確立されれば、その計算を繰返して行なうことによって、非線形解析が可能になるわけである。

2.1 増分変位と増分歪との関係式

断面の平面保持の仮定により、部材内の増分歪 $\Delta\epsilon_x$ は次式で表わされる。

$$\Delta\epsilon_x = \Delta\epsilon_0 - \Delta\phi \cdot z \dots\dots\dots(2)$$

$\Delta\epsilon_0$: 重心軸における増分歪

* State : step by step method, iteration method によって計算を行なう際のある一つの状態をとよんで説明する。
 ** 境界条件: 本論文では、境界条件という言葉を広義に用い、変位の境界条件 (固定条件, 強性変位の条件), 外力の境界条件をあわせて境界条件とよんだ。そのうち外力と強度変位に関する境界条件が step ごとに变化出来るものである。

$\Delta\phi$: 曲率増分
 z : 重心軸からの距離

$\Delta\phi$ 曲率増分 (図-6 参照)

state S における部材の中央軸の位置 (local 座標の y)

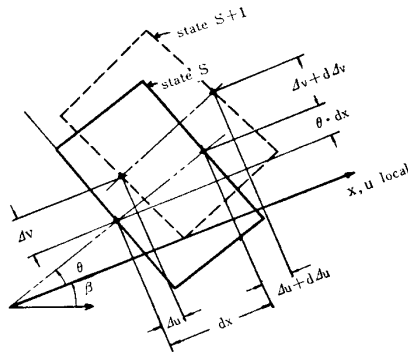
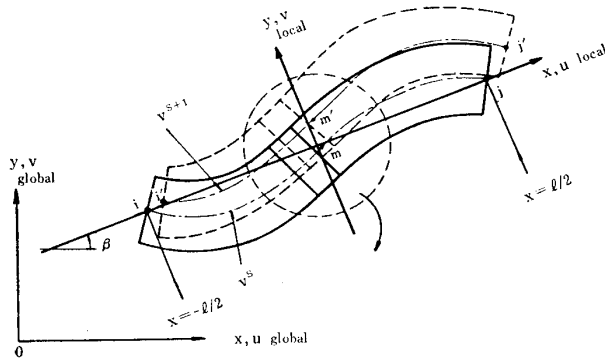


図-6

軸方向に対して)を $v^S(x)$ とすると, state $S+1$ における位置 $v^{S+1}(x)$ は

$$v^{S+1}(x) = v^S(x) + \Delta v(x) \dots\dots\dots (3)$$

と表わされる。各 state において曲率 ϕ^S, ϕ^{S+1} は次のように導びかれる。

$$\phi^S = \frac{\frac{d^2 v^S}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dv^S}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}} = \frac{\frac{d^2 v^S}{dx^2}}{(1 + \theta^2)^{3/2}} \dots\dots (4)$$

ただし $\theta = \frac{dv^S}{dx} \dots\dots\dots (5)$

$$\begin{aligned} \phi^{S+1} &= \frac{\frac{d^2 v^{S+1}}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dv^{S+1}}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}} \\ &= \frac{\frac{d^2 v^S}{dx^2} + \frac{d^2 \Delta v}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\theta + \frac{d \Delta v}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}} \end{aligned}$$

分母に含まれている $d \Delta v / dx$ は θ に比較して微小なので省略すると,

$$\phi^{S+1} = \frac{\frac{d^2 v^S}{dx^2} + \frac{d^2 \Delta v}{dx^2}}{(1 + \theta^2)^{3/2}} \dots\dots\dots (6)$$

ここで, 曲率の増分 $\Delta\phi$ は ϕ^{S+1} と ϕ^S との差であるから

$$\Delta\phi = \phi^{S+1} - \phi^S$$

$$= \frac{\frac{d^2 \Delta v}{dx^2}}{(1 + \theta^2)^{3/2}} \dots\dots\dots (7)$$

となる。

$\Delta\epsilon_0$ 中央軸の増分歪

微小区間 dx にピタゴラスの定理を適用すると, 図-6を参照して

$$\begin{aligned} &\{(\Delta v + d \Delta v + \theta dx) - \Delta v\}^2 \\ &+ \{(dx + \Delta u + d \Delta u) - \Delta u\}^2 \\ &= \{(1 + \Delta\epsilon_0) \sqrt{(\theta dx)^2 + (dx)^2}\}^2 \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

となり, これを整理し $(dx)^2$ で割ると,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d \Delta v}{dx}\right)^2 + 2\theta\left(\frac{d \Delta v}{dx}\right) + 2\left(\frac{d \Delta u}{dx}\right) \\ &= 2(1 + \theta^2) \Delta\epsilon_0 \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

となる。

結果として, 中央軸の増分歪 $\Delta\epsilon_0$ は次のように表わされる。

$$\Delta\epsilon_0 = \frac{1}{1 + \theta^2} \left\{ \frac{d \Delta u}{dx} + \theta \frac{d \Delta v}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{d \Delta v}{dx}\right)^2 \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$\Delta\epsilon_x$ 増分歪

中央軸上の増分歪と曲率の増分による歪を加えることによって, 中央軸から z だけ離れた点の増分歪 $\Delta\epsilon_x$ は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_x &= \Delta\epsilon_0 - \Delta\phi z \\ &= \frac{1}{(1 + \theta^2)} \left\{ \frac{d \Delta u}{dx} + \theta \frac{d \Delta v}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{d \Delta v}{dx}\right)^2 \right\} \\ &\quad - \frac{1}{(1 + \theta^2)^{3/2}} \cdot \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \cdot z \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

2.2 増分変位関数

増分変位関数として, 変形が大きいこと, 歪が塑性域に入ることを考慮して, 線材に対して普通用いられている変位関数より, 軸方向, 直交方向ともに1次ずつ高い次数の多項式を用いた。

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \\ \Delta v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 x^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^4 \\ \Delta\theta &= \frac{d \Delta v}{dx} = \alpha_5 + 2\alpha_6 x + 3\alpha_7 x^2 + 4\alpha_8 x^3 \end{aligned} \right\} (12)$$

ただし, $\alpha_1 \sim \alpha_8$ はこの増分変位関数の未定係数である。

この未定係数は, このままでは, 他の部材との連続を

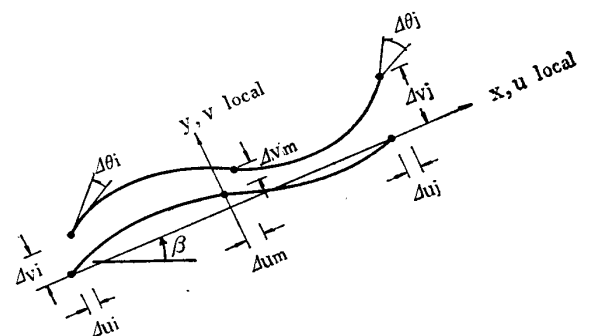


図-7

満たすための境界条件を導入することが困難なので、図一7に示したような、部材の両端、中点における8個の増分変位* Δu と未定係数* α との一次的な関係を求めておく。

$$\Delta u = \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta u_m \\ \Delta u_j \\ \Delta v_i \\ \Delta v_m \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

$$\alpha = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (13')$$

Δu と α との関係は増分変位関数にそれぞれの x 座標の値を代入することによって次式のように簡単に求めることができる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta u_m \\ \Delta u_j \\ \Delta v_i \\ \Delta v_m \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -l/2 & l^2/4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & l/2 & l^2/4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -l/2 & l^2/4 & -l^3/8 & l^4/16 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & l/2 & l^2/4 & l^3/8 & l^4/16 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -l & 3l^2/4 & -l^3/2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & l & 3l^2/4 & l^3/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

または、マトリックス記号で表現すると、

$$\Delta u = T \cdot \alpha \dots\dots\dots (15)$$

となり、逆マトリックスを計算して α を Δu で表わすと、

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1/l & \cdot & 1/l & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2/l^2 & -4/l^2 & 2/l^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -3/2l & \cdot & 3/2l & -1/4 & -1/4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4/l^2 & -8/l^2 & 4/l^2 & 1/2l & -1/2l \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2/l^3 & \cdot & -2/l^3 & 1/l^2 & 1/l^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -8/l^4 & 16/l^4 & -8/l^4 & -2/l^3 & 2/l^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta u_m \\ \Delta u_j \\ \Delta v_i \\ \Delta v_m \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

$$\text{または、} \alpha = T^{-1} \Delta u \dots\dots\dots (17)$$

のようになる。なお、変形が小さく、内部応力が弾性を保っているならば、 $\alpha_3 = \alpha_8 = 0$ である。

* $\Delta u, \alpha$ 等の太字はベクトル、またはマトリックスを意味する。

上式までに述べてきた変位はすべて、各部材ごとに x 軸がその両端を通る local 座標によっていた。ここで新たに global 座標として、すべての部材に共通な絶対座標を定義する。この座標系における変位には G の subscript をつけて Δu_G と表わすことにし、次に Δu_G と Δu との関係を求める。

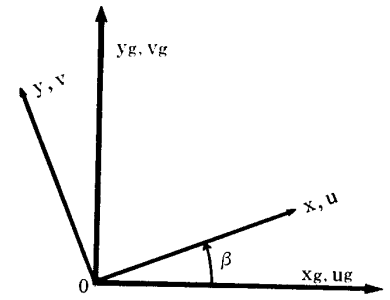


図-8

図-8に示すように local 座標が global 座標に対して β だけ回転しているとすると、幾何学的な条件より、

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_G \\ \Delta v_G \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

のような関係が得られる。

これを部材の8個の増分変位に適用すると Δu_G と Δu との関係は、

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_{Gi} \\ \Delta u_{Gm} \\ \Delta u_{Gj} \\ \Delta v_{Gi} \\ \Delta v_{Gm} \\ \Delta v_{Gj} \\ \Delta \theta_{Gi} \\ \Delta \theta_{Gj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \cdot & \cdot & -\mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & -\mu & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & -\mu & \cdot & \cdot \\ \mu & \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mu & \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta u_m \\ \Delta u_j \\ \Delta v_i \\ \Delta v_m \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

$$\text{または、} \Delta u_G = L \cdot \Delta u = L \cdot T \cdot \alpha \dots\dots\dots (20)$$

$$\text{ただし: } \lambda = \cos \beta, \mu = \sin \beta \dots\dots\dots (21)$$

これもやはり、逆マトリックスを計算すると Δu は Δu_G によって次のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta u_m \\ \Delta u_j \\ \Delta v_i \\ \Delta v_m \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot \\ -\mu & \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\mu & \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\mu & \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_{Gi} \\ \Delta u_{Gm} \\ \Delta u_{Gj} \\ \Delta v_{Gi} \\ \Delta v_{Gm} \\ \Delta v_{Gj} \\ \Delta \theta_{Gi} \\ \Delta \theta_{Gj} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

$$\text{または、} \Delta u = L^{-1} \Delta u_G \dots\dots\dots (23)$$

これより α と Δu_G との関係は、

$$\alpha = H \cdot \Delta u_G \dots\dots\dots (24)$$

$$\text{ただし、} H = T^{-1} \cdot L^{-1} \dots\dots\dots (25)$$

となる。

2.3 歪エネルギーの計算 (Appendix 1 参照)

増分変位によって構造体にたくわえられる歪エネルギーを下式に示すように2つにわけて計算する。

$$U = U_1 + U_2 \dots\dots\dots(26)$$

ただし: U_1 ...initial stress によるもの
 U_2 ...incremental stress によるもの

応力-歪の関係より応力が降伏点に達している点では
 $U_2 = 0 \dots\dots\dots(27)$

である。

変位の微分式は (12) 式の増分変位関数を微分することによって \mathbf{a} を用いて

$$\frac{d\Delta u}{dx} + \theta \frac{d\Delta v}{dx} = (0 \ 1 \ 2x \ 0 \ \theta \ 2\theta x \ 3\theta x^2 \ 4\theta x^3) \cdot \mathbf{a} \dots\dots\dots(28)$$

$$\frac{d\Delta v}{dx} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2x \ 3x^2 \ 4x^3) \cdot \mathbf{a} \dots\dots(29)$$

$$\frac{d^2\Delta v}{dx^2} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 6x \ 12x^2) \cdot \mathbf{a} \dots\dots(30)$$

と表わすことが出来るから、 U_1, U_2 は次に示すように計算される。

U_1 : initial stress によるもの

$$U_1 = \iiint_V \sigma_x \Delta \epsilon_x dx dy dz \dots\dots\dots(31)$$

従って、(11) 式を用いてまた、

$$U_1 = \int_I \int_A \sigma_x \left[\frac{1}{1+\theta^2} \left\{ \frac{d\Delta u}{dx} + \theta \frac{d\Delta v}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right\} - \frac{z}{(1+\theta^2)^{3/2}} \cdot \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right] dA dx \dots\dots\dots(32)$$

また、

$$U_1 = U_{11} + U_{12} + U_{13} \dots\dots\dots(33)$$

ただし (33) 式の各項は次に示すようなベクトル、またはマトリックスと \mathbf{a} との積分に展開される。(Appendix-1 参照) A_1, A_2 等の内容は後に示す。

$$U_{11} = \int_I \left(\frac{1}{1+\theta^2} \int_A \sigma_x dA \right) \left(\frac{d\Delta u}{dx} + \theta \frac{d\Delta v}{dx} \right) dx = \mathbf{a}^T A_1 \dots\dots\dots(34)$$

ここで \mathbf{a}^T は \mathbf{a} の転置ベクトルを意味する。

$$U_{12} = - \int_I \left\{ \frac{1}{(1+\theta^2)^{3/2}} \int_A \sigma_x z dA \right\} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} dx = -\mathbf{a}^T A_2 \dots\dots\dots(35)$$

$$U_{13} = \int_I \left(\frac{1}{1+\theta^2} \int_A \sigma_x dA \right) \frac{1}{2} \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T A_3 \mathbf{a} \dots\dots\dots(36)$$

U_2 : incremental stress によるもの

$$U_2 = \iiint_V \frac{1}{2} E (\Delta \epsilon_x)^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \int_I \int_A E \left[\frac{1}{1+\theta^2} \left\{ \frac{d\Delta u}{dx} + \theta \frac{d\Delta v}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^{2**} \right\} - \frac{z}{(1+\theta^2)^{3/2}} \cdot \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right]^2 dA dx$$

** $1/2 \cdot (d\Delta v/dx)^2$ の項は、 U_2 が U_1 に比較して小さいこと、その上、 U_2 に含まれる項の中でも微小とみなせるので省略した。

$$\dots\dots\dots(37)$$

$$U_2 = U_{21} + U_{22} + U_{23} \dots\dots\dots(38)$$

ただし、

$$U_{21} = \frac{1}{2} \int_I \left\{ \left(\frac{1}{1+\theta^2} \right)^2 \int_A E dA \right\} \left(\frac{d\Delta u}{dx} + \theta \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T A_2 \mathbf{a} \dots\dots\dots(39)$$

$$U_{22} = - \frac{1}{2} \int_I \left\{ \frac{1}{1+\theta^2} \frac{1}{(1+\theta^2)^{3/2}} \int_A E z dA \right\} \cdot \left\{ \left(\frac{d\Delta u}{dx} + \theta \frac{d\Delta v}{dx} \right) \frac{d^2\Delta v}{dx^2} + \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \left(\frac{d\Delta u}{dx} + \theta \frac{d\Delta v}{dx} \right) \right\} dx = - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T A_3 \mathbf{a} \dots\dots\dots(40)$$

$$U_{23} = \frac{1}{2} \int_I \left[\left\{ \frac{1}{(1+\theta^2)^{3/2}} \right\}^2 \cdot \int_A E z^2 dA \right] \cdot \left(\frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T A_4 \mathbf{a} \dots\dots\dots(41)$$

$U_{11} \sim U_{23}$ に含まれているベクトル A_1, A_2 、マトリックス $A_1 \sim A_4$ はそれぞれ次のように表わされる。本論文では、これらのベクトル、マトリックスの計算はすべて数値積分を用いて計算した。

$$A_1 = \int_I \left(\frac{1}{1+\theta^2} \int_A \sigma_x dA \right) \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 0 \\ \theta \\ 2\theta x \\ 3\theta x^2 \\ 4\theta x^3 \end{Bmatrix} dx \dots\dots\dots(42)$$

$$A_2 = \int_I \left\{ \frac{1}{(1+\theta^2)^{3/2}} \int_A \sigma_x z dA \right\} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6x \\ 12x^2 \end{Bmatrix} dx \dots\dots\dots(43)$$

$$A_3 = \int_I \frac{1}{1+\theta^2} \int_A \sigma_x dA \cdot \begin{Bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2x & 4x^2 & 6x^3 & 8x^4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3x^2 & 6x^3 & 9x^4 & 12x^5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4x^3 & 8x^4 & 12x^5 & 16x^6 \end{Bmatrix} dx \dots\dots\dots(44)$$

$$A_2 = \int_l \left(\frac{1}{1+\theta^2} \right)^2 \cdot \int_A E dA \cdot \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 2x & \cdot & \theta & 2\theta x & 3\theta^2 x^2 & 4\theta^3 x^3 \\ \cdot & 2x & 4x^2 & \cdot & 2\theta x & 4\theta^2 x^2 & 6\theta^3 x^3 & 8\theta^4 x^4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \theta & 2\theta x & \cdot & \theta^2 & 2\theta^2 x & 3\theta^3 x^2 & 4\theta^4 x^3 \\ \cdot & 2\theta x & 4\theta^2 x^2 & \cdot & 2\theta^2 x & 4\theta^3 x^2 & 6\theta^4 x^3 & 8\theta^5 x^4 \\ \cdot & 3\theta^2 x^2 & 6\theta^3 x^3 & \cdot & 3\theta^3 x^2 & 6\theta^4 x^3 & 9\theta^5 x^4 & 12\theta^6 x^5 \\ \cdot & 4\theta^3 x^3 & 8\theta^4 x^4 & \cdot & 4\theta^4 x^3 & 8\theta^5 x^4 & 12\theta^6 x^5 & 16\theta^7 x^6 \end{bmatrix} dx \quad (45)$$

$$A_3 = \int_l \frac{1}{1+\theta^2} \cdot \frac{1}{(1+\theta^2)^{3/2}} \int_A E x z dA \cdot \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 6x & 12x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4x & 12x^2 & 24x^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2\theta & 6\theta x & 12\theta x^2 \\ \cdot & 2 & 4x & \cdot & 2\theta & 8\theta x & 18\theta x^2 & 32\theta x^3 \\ \cdot & 6x & 12x^2 & \cdot & 6\theta x & 18\theta x^2 & 36\theta x^3 & 60\theta x^4 \\ \cdot & 12x^2 & 24x^3 & \cdot & 12\theta x^2 & 32\theta x^3 & 60\theta x^4 & 96\theta x^5 \end{bmatrix} dx \quad (46)$$

$$A_4 = \int_l \frac{1}{(1+\theta^2)^{3/2}} \int_A E x^2 dA \cdot \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 12x & 24x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 12x & 36x^2 & 72x^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 24x^2 & 72x^3 & 144x^4 \end{bmatrix} dx \quad (47)$$

面積に関する各積分はそれぞれ次のような意味をもっている。

- $\int \sigma_x dA$: その点の軸力
- $\int \sigma_x z dA$: 重心軸に関するその点のモーメント
- $\int E dA$: (弾性を保っている面積) × (ヤング率)
- $\int E x z dA$: (弾性断面の 1 次モーメント) × (ヤング率)
- $\int E x^2 dA$: (弾性断面の 2 次モーメント) × (ヤング率)

数値積分の方法

数値積分には Gauss の方法を用いた。これは x の変域 $(-l/2 \leq x \leq l/2)$ の中に n 個の点を取り、そこで求めた関数値に適当な重みを掛けながら和を取るによって積分値を計算する方法である。

$$\int_{-l/2}^{l/2} f(x) dx = \sum_{i=1}^n H_i \cdot l \cdot f(a_i \cdot l) \quad (48)$$

ただし、

$a_i \cdot l$: 関数値を計算すべき点の位置。

$H_i \cdot l$: 各関数値に掛けるべき重み。

本論文では $n=9$ を用いたが a_i, H_i の値は表-1 に示すようなものである。

表-1 Gauss 求積公式の横座標と重み係数 ($n=9$)

i	a_i	H_i
1	-0.484080119753813	0.040637194180787
2	-0.418015553663318	0.099324080347429
3	-0.306685716350295	0.130305348201468
4	-0.162126711701905	0.156173538520002
5	0.0	0.156119677500630
6	0.162126711701905	0.156173538520002
7	0.306685716350295	0.130305348201468
8	0.418015553663318	0.099324080347429
9	0.484080119753813	0.040637194180787

Gauss の数値積分法は $(2n-1)$ 次式まで完全解を得られるので、今回の計算では 17 次式まで完全な積分が行なわれているはずである。

このように、積分はすべて数値積分によって解析を行なったので部材内の歪度、応力度等の分布状態はこの公式の $a_i \cdot l$ に対応する点だけで計算すればよいことになる。この方法は、本稿であつかった線材解析だけでなく立体骨組解析、板の解析等に対しても拡張出来るので、非常に有効な手段である。

これまでの計算の結果、 m 番目の部材 (element) に新たにたくわえられる歪エネルギー U_m は

$$U_m = U_1 + U_2 = \mathbf{a}^T A + \frac{1}{2} \mathbf{a}^T A \mathbf{a} \quad (49)$$

$$\text{ただし、 } A = A_1 - A_2 \quad (50)$$

$$A = A_1 + A_2 - A_3 + A_4 \quad (51)$$

と整理される。これを増分変位 Δu_G で表わすと、(24) 式より $\mathbf{a} = \mathbf{H} \cdot \Delta u_G$ であるから

$$U_m = \Delta u_G^T \mathbf{H}^T A + \frac{1}{2} \Delta u_G^T \mathbf{H}^T A \mathbf{H} \Delta u_G \quad (52)$$

となる。

Δu_G はある部材に属している増分変位 8 個だけを考えていたので、ここまででは 8×1 のベクトルであった。ここからは、全構造体にたくわえられる、歪エネルギー計算するために Δu_G を構造体の全増分変位ベクトル Δu_{GT} の一部であると考え、次からの式を展開する。このことによって、前式のマトリックス演算はその部材に関係したマトリックス、またはベクトルの要素間での演算に変わっただけであるから、それによって計算結果はなんら影響を受けないことは当然である。

結果として、全構造体がたくわえる歪エネルギー U_T は次のように求めることが出来る*。

* 通常のマトリックス法との比較。

B : state S において内部応力に釣合うために必要な節点力。

B : state S における全体剛性マトリックス。

$$U_T = \sum_m U_m = \Delta u_{GT}^T B + \frac{1}{2} \Delta u_{GT}^T B \Delta u_{GT} \dots\dots\dots(53)$$

ただし、

$$\Delta u_{GT} : \text{構造体の全増分変位ベクトル}$$

$$B = \sum_m H_m^T A_m \dots\dots\dots(54)$$

$$B = \sum_m H_m^T A_m H_m \dots\dots\dots(55)$$

2.4 外力のなす仕事

外力のなす仕事 w は、

$$w = \Delta u_{GT}^T F \dots\dots\dots(56)$$

ただし、

F : Δu_{GT} に対応したベクトルで、全外力を示す。

2.5 ポテンシャルエネルギーの計算

ポテンシャルエネルギーが state S において Π^S の位置にあったとすると、state $S+1$ に変化する間に w の仕事をし、 U_T だけを歪エネルギーとしてたくわえられるから、state $S+1$ におけるポテンシャルエネルギー Π^{S+1} は

$$\Pi^{S+1} = \Pi^S - w + U_T \dots\dots\dots(57)$$

∴ (53), (56) 式より

$$\begin{aligned} \Pi^{S+1} &= \Pi^S - \Delta u_{GT}^T F + \Delta u_{GT}^T B \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta u_{GT}^T B \Delta u_{GT} \\ &= \Pi^S + \Delta u_{GT}^T (B - F) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta u_{GT}^T B \Delta u_{GT} \dots\dots\dots(58) \end{aligned}$$

となる。

2.6 Δu_{GT} の決定

最小ポテンシャルエネルギーの法則によれば、静的に境界条件が変化した時の増分変位 Δu_{GT} は前で計算したポテンシャルエネルギーを停留させているはずである(ポテンシャルエネルギーの停留原理)。このことから、2次形式の変分原理を用いて Δu_{GT} を決定することが可能である。

(58) 式を Δu_{GT} によって下式のように変分し、停留原理により

$$\delta \Delta u_{GT} \text{ に対して } \delta \Pi^{S+1} = 0 \dots\dots\dots(59)$$

とおく。これは

$$(B - F) + B \Delta u_{GT} = 0 \dots\dots\dots(60)$$

と計算されるから Δu_{GT} は次に示す連立一次方程式を解くことによって求められる。

$$B \Delta u_{GT} = F - B \dots\dots\dots(61)$$

本論文では、この方程式の解法として、行、列ともに入れ換えを行なって計算する Sweep out 法を用いた。

§3 state S から state $S+1$ への修正

ここまでの計算で求めた増分変位をもとにして、state S の状態を state $S+1$ の状態へ修正し変換する。

3.1 節点座標

各節点の座標をそれに応じた増分変位によって次のように修正する。

$$\left. \begin{aligned} x_i^{S+1} &= x_i^S + \Delta u_{Gi} \quad (i=1 \sim n) \\ y_i^{S+1} &= y_i^S + \Delta v_{Gi} \quad (i=1 \sim n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(62)$$

ただし Δu_{Gi} : Δu_{GT} の内、 i 節点の x 方向増分変位
 Δv_{Gi} : Δu_{GT} の内、 i 節点の y 方向増分変位

3.2 部材内の歪度

増分変位関数の未定係数 α は増分変位 Δu_{GT} の内の Δu_G によって、(24) 式より

$$\alpha = H \Delta u_G \dots\dots\dots(63)$$

と表わされるから、(12) 式より求まる次の3つの微分式は x 座標の値を代入することによって任意の点で決定出来る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \Delta u}{dx} &= (0 \ 1 \ 2x \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \alpha \\ \frac{d \Delta v}{dx} &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2x \ 3x^2 \ 4x^3) \alpha \\ \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 6x \ 12x^2) \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(64)$$

これを既に求めた下式の関係に代入することによって増分歪を任意の点で簡単に求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \epsilon_0 &= \frac{1}{1+\theta^2} \left\{ \frac{d \Delta u}{dx} + \theta \frac{d \Delta v}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{d \Delta v}{dx} \right)^2 \right\} \\ \Delta \phi &= \frac{1}{(1+\theta^2)^{3/2}} \left\{ \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right\} \\ \Delta \theta &= \frac{d \Delta v}{dx} - R \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(65)$$

ただし、

$$\begin{aligned} R &= \frac{\Delta v_j - \Delta v_i}{l} \\ &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ l^2/4 \ 0) \alpha \dots\dots\dots(66) \end{aligned}$$

これらの結果を state S の歪度に加えて state $S+1$ の歪度が計算される。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_0^{S+1} &= \epsilon_0^S + \Delta \epsilon_0 \\ \phi^{S+1} &= \phi^S + \Delta \phi \\ \theta^{S+1} &= \theta^S + \Delta \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(67)$$

歪エネルギーを数値積分によって計算しているので、これらの計算は (48) 式で説明した $a_i \cdot l$ に対応した点だけで行なっておけばよい。

3.3 部材内の応力度

増分歪によって部材内の応力度分布は次のように修正されなければならない。部材内の増分歪 $\Delta \epsilon_x$ は

$$\Delta \epsilon_x = \Delta \epsilon_0 - \Delta \phi z \dots\dots\dots(68)$$

であるから、応力—歪の関係を用いて図—9 に示すように部材内の応力度分布を修正することが出来る。

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_x^S + E \Delta \epsilon_x| &\geq \sigma_y \text{ の部分に対して} \\ \sigma_x^{S+1} &= \sigma_y \dots\dots\dots(69) \end{aligned} \right\}$$

$$|\sigma_x^S + E \Delta \epsilon_x| < \sigma_y \text{ の部分に対して}$$

$$\sigma_x^{S+1} = \sigma_x^S + E \Delta \epsilon_x \dots\dots\dots(70)$$

本論文で用いた計算法では、断面内で図-9に示した

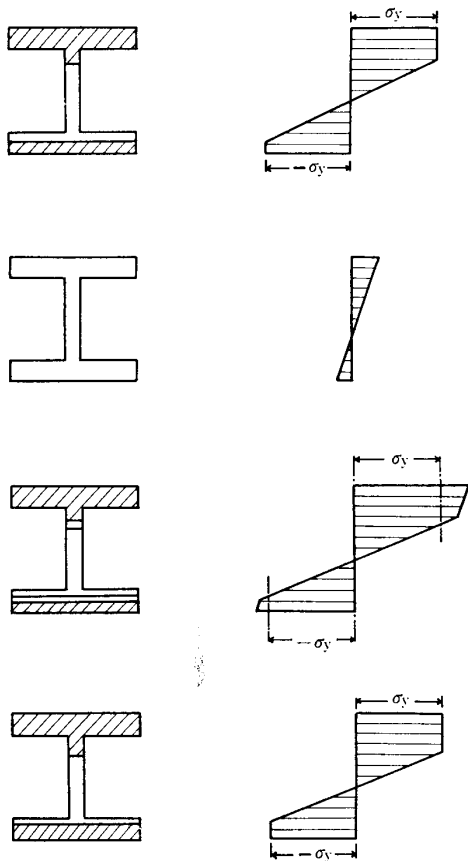


図-9

ような応力度の値が折れ曲る点の数が20までは計算可能にしてあるので、繰返し載荷等の計算によって複雑な応力度分布になった後にも計算を続けることができる。

§4 iteration procedure と step by step approximation について

以上のようにして state S から state S+1 への変換がすべて終了したことになる。序文でも述べたように、step by step 法, iteration 法を用い、これまでの計算を繰返してゆくことによって境界条件を任意に変化させることができる。

iteration procedure

新たな状態 (state S+1) において、内部応力より求めた節点力は、全外力と等しくなっていなければならない。

$$F^S = B^{S+1} \dots\dots\dots(71)$$

ただし

F^S : state S において全外力を示すベクトル

B^{S+1} : state S+1 において内部応力に釣合うために必要な節点力

しかし、材料の新たな降伏の進行、増分変位による幾何学的な形の変化等によって、この式が完全に満足されていることはほとんどない。ここで用いなければならない

い方法が収束計算 (iteration procedure) である。本論文における計算では外力 F を変化させずに 3 回~6 回の計算を繰返すことによって iteration を行ない

$$F = B \dots\dots\dots(72)$$

の関係が満足されるようにしている。

step by step approximation (incremental approximation)

このように数回の iteration を行なった後、境界条件を変化させて新たな状態を求めてゆく。このように境界条件を段階的に変化させてゆく方法を step by step といい、本論文では上記の iteration とこの step by step を組み合わせて計算している。図-10に示すように a から d を求めながら次の state へ進んでゆく計算が step by step approximation であり、 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$ と解を収束させる計算が iteration procedure である。

Appendix-2 は、以上の計算の手順をフローチャートで示したものである。

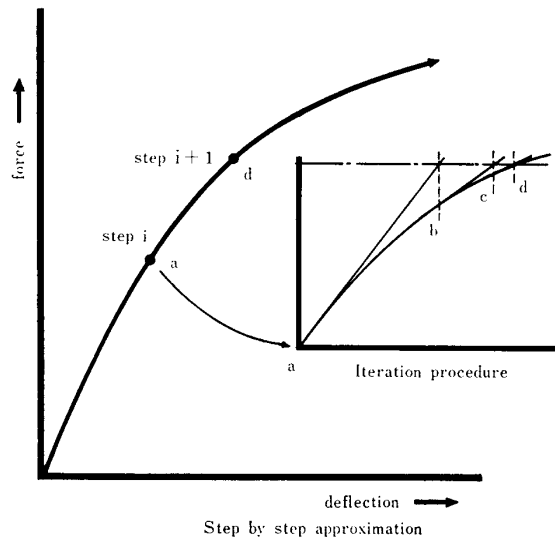


図-10

§5 解析例

以上説明してきた理論にもとづき、数種の例題を解析し、非常に満足すべき結果を得たが、ここにその一部を紹介する。

5.1 軸力 N で水平に張られたピントラスの問題

初めの例題は図-12に示すように幾何学的非線形を考慮しなければ解析出来ない問題である。エネルギー法によって正解を求めると

$$P = AE \left(\frac{V}{l} \right)^3 + 2 N_0 \left(\frac{V}{l} \right)$$

$$= 0.21 V^3 + 2 V \dots\dots\dots(73)$$

となるが本解析の結果とまったく一致していることがわかる。

5.2 Elastic buckling problem

図-13に示す弾性座屈の問題を解析する。数値解析に

よっているので P だけを增加していたのでは、マトリックスの determinant が急にゼロになるだけで変形曲線までを求めることが出来ない。そのために、中点に Q (0.02 ton) の水平力を加え、その後 P を増加してゆく計算法をとった。正解値は

$$P_{cr} = \frac{20.19 EI}{l^2} = \frac{20.19 \times 2,100 \times 9}{100^2} = 38.16 \text{ ton} \dots\dots\dots (74)$$

である。この値を図-13の中に示してあるが、計算によ

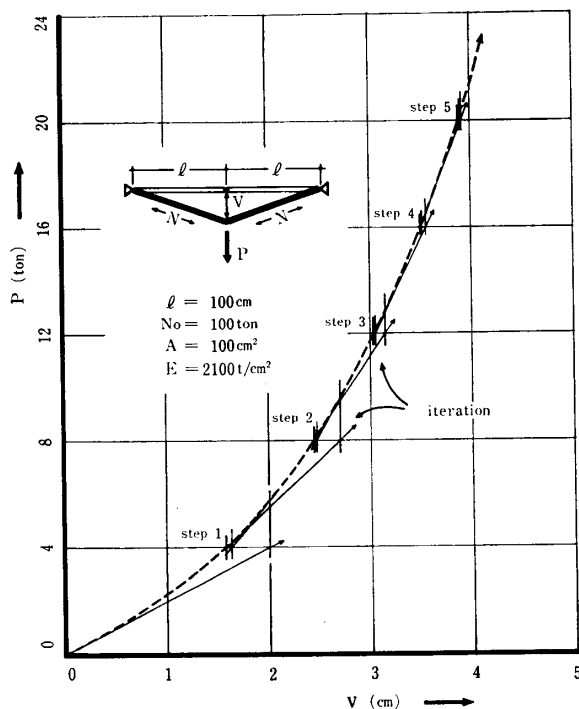


図-11

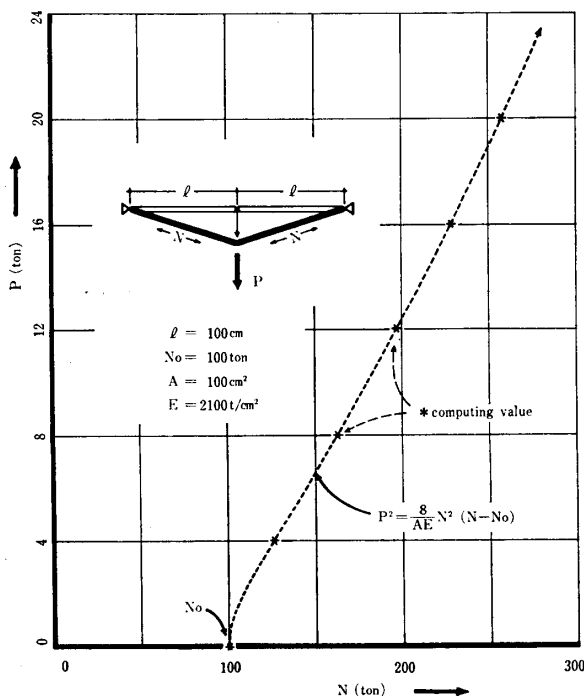


図-12

る結果がそれを上回って行くのは、座屈による変形が大きくなると、一本の部材を3本に分割した位では、正解値と完全に一致した変形状態を取ることが出来なくなるためである。

5.3 Two-story portal frames

図-14に示す2層1スパンの構造物の解析結果を示す。多層構造物の下層階を考えているので、柱には500 tonの軸力を考慮し、梁には長期荷重を考慮した。変形図(図-15, 図-16)で、黒くぬった部分は、塑性域を示している。図-17, 図-18に、荷重と水平変位垂直変位との関係を示した。

§ おわりに

本論文では、ポテンシャルエネルギーの停留原理にもとづき、歪エネルギーをすべて数値積分によって計算する方法を用いて平面骨組の非線形解析を行なった。

本論文中、例題として解析した例を考察した結果、この方法の妥当性が十分裏付けられ、この方法が平面骨組だけでなく、立体骨組、板、シェル等の問題に対し、そのまま拡張出来るものであり、非常に有効な手段であると考えられるので、今後これらの問題に対する解析へと理論を拡張し、研究を進めて行きたいと考えている。

この研究に際して、東京工業大学藤本研究室の松本芳紀、橋本篤秀、近藤和平、大熊武司の諸氏から援助をいただき、また、日建設計構造部の杉原健児、寺本隆幸ならびに事務所の方々からは、matrix法の実際問題への適用、本論文の解析例などに対して援助をいただきました。ここに深く感謝致します。

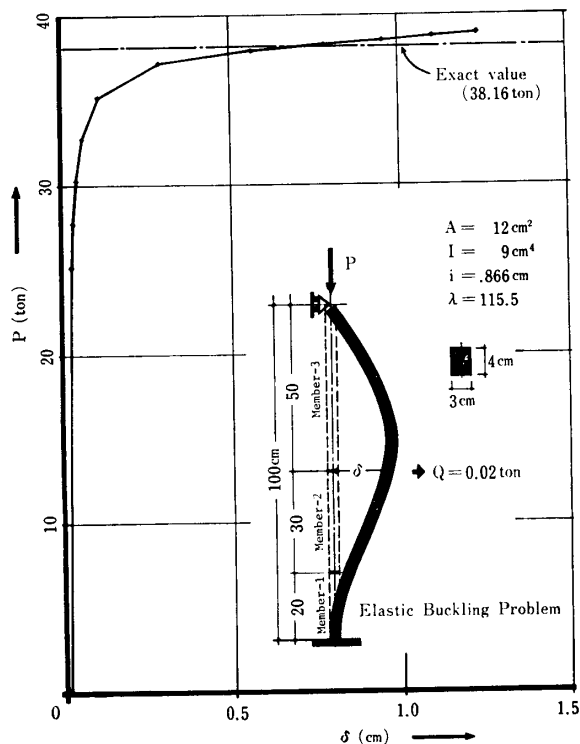


図-13

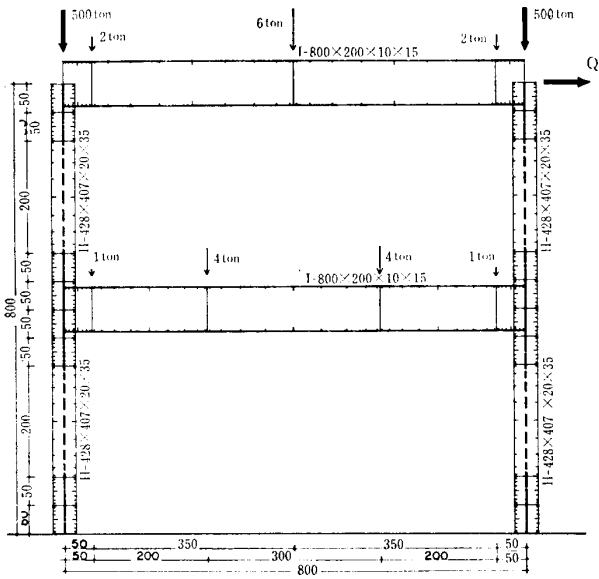


図-14

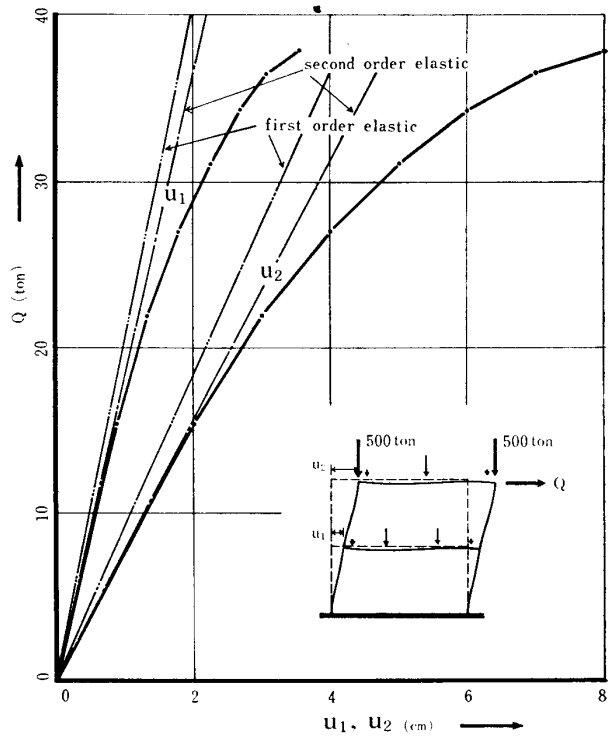


図-17

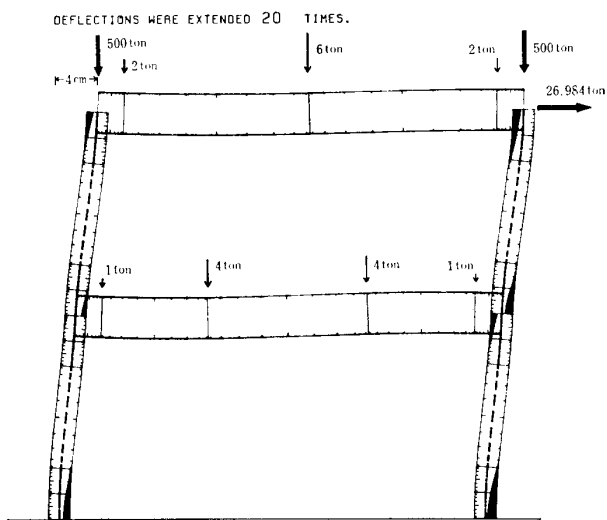


図-15

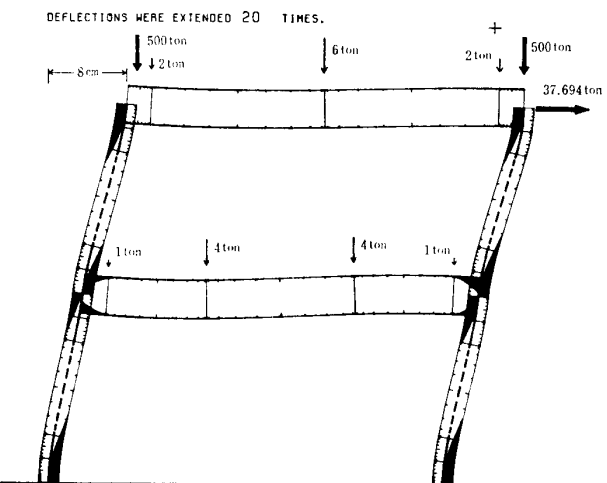


図-16

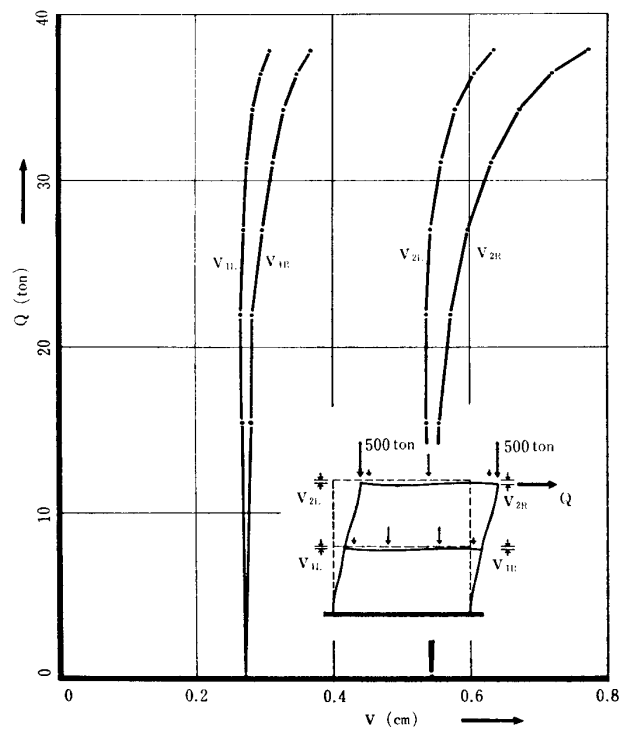


図-18

参考文献

- 1) 羽倉弘人, 藤本盛久: 繰返し荷重をうける鉄骨断面の弾塑性解析に関する研究, 第1報~第5報. 日本建築学会論文報告集, No. 117・40年11月, No. 121・41年3月, No. 122・41年4月, No. 125・41年7月, No. 133・42年3月
- 2) 羽倉弘人, 松本芳紀, 藤本盛久: 繰返し荷重をうける鋼構造物の歪硬化モデルを用いた弾塑性解析, 日本建築学会論文報告集, No. 145・昭和43年3月
- 3) 若林実, 辻文三: 繰返し水平荷重をうけるラーメンの性

状, その1, その2, その3. 日本建築学論文報告集, No. 103・昭和39年10月, 号外昭和40年度大会学術講演要旨集, 昭和41年度日本建築学会近畿支部研究報告集.

- 4) 若林実, 野中泰二郎: 架構の復元力特性に関する軸力を考慮した多線型解析. 昭和43年度日本建築学会近畿支部研究報告集.
- 5) 棚橋諒, 横尾義貫, 若林実, 中村恒善, 国枝治郎, 松永裕之, 久保田俊彦: H型鋼の定軸圧下繰返両振塑性曲げ試験. その1, その2. 日本建築学会昭和43年度(中国)大会学術講演梗概集.
- 6) 加藤勉, 秋山 宏: 鋼構造部材の耐力, その1~その5. 日本建築学会論文報告集, No. 119・昭和41年1月, No. 149・昭和43年7月, No. 150・昭和43年8月, No. 151・昭和43年9月, No. 152・昭和43年10月.
- 7) 坂本順, 宮村篤典: 鋼構造骨組の弾塑性域における変形と安定性に関する考察, 第1報~第3報. 日本建築学会論文報告集, No. 110・昭和40年4月, No. 113・昭和40年7月, No. 116・昭和40年10月.
- 8) 小野薫, 田中尚: 軸方向力を考慮したラーメンのリミットデザイン, 日本建築学会論文集, No. 50・昭和30年3月.
- 9) 山田稔, 坂恵一巳, 田所敏幸, 白川 潔: 軸圧をうけるH形鋼部材の弾塑性曲げ変形状に関する研究 1, 2, 日本建築学会論文報告集No. 127, 昭和41年9月, No.141・昭和42年11月.
- 10) 五十嵐定義, 多賀直恒, 高田干一郎, 小柳義雄: 繰返し荷重をうける鋼構造架構の塑性性状, 日本建築学会論文報告集. No.130, 41年12月.
- 11) 多賀直恒, 小柳義雄, 大島基義: 鋼構造架構の荷重変形状, 1, 2. 日本建築学会論文報告集. No. 140・昭和42年10月, No. 156・44年2月.
- 12) 牧野 稔: 水中力を受ける鉄骨ラーメンの変形状に関する一考察, 日本建築学会論文報告集, No. 86・昭和38年6月.
- 13) 佐藤 稔夫, 半貫敏夫, 古賀正三: 塑性崩壊と座屈崩壊に関する弾塑性ラーメンの解法と計算例, 日本建築学会論文報告集, No. 152・昭和43年10月.
- 14) 黒羽啓明: Analysis of inelastic Frame Buckling 熊本大学工学部紀要, 第13巻第2号・昭和41年3月.
- 15) 山田孝一郎: 捻角法形式による骨組の弾塑性解析法とその応用, その1, その2. 日本建築学会論文報告集, No. 80・昭和37年12月, No. 81・昭和38年1月.
- 16) 日置興一郎, 平野朝則: 横力を受ける矩形ラーメンの弾塑性挙動.
- 17) 藤本盛久, 守谷一彦, 和田 章: 塑性履歴をうけた鋼材ならびに部材の力学的性状に関する研究, その1. 日本建築学会論文報告集, No. 167・昭和45年1月.
- 18) O.C. Zienkiewicz: "The finite element method in structural and continuum mechanics", McGraw-Hill, 1968.
- 19) J.S. Przemieniecki: "Theory of matrix structural analysis", McGraw-Hill, 1968.
- 20) K. Washizu: "Variational method in Elasticity and Plasticity", Pergamon Press, 1968.
- 21) M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp: "Stiffness and deflection analysis of complex structures", A.I.A.A., Sep. 1956.
- 22) M.J. Turner, E.H. Dill, H.C. Martin, R.J. Melosh: "Large deflections of structures subjected to heating and external loads", A.I.A.A., Feb. 1960.
- 23) R. H. Gallagher, J. Padlog: "Discrete element approach to structural instability analysis", A.I.A.A., Jun. 1963.
- 24) J.T. Oden: "Calculation of geometric stiffness mat-

- rices for complex structures", A.I.A.A., Aug. 1966.
- 25) J. S. Przemieniecki: "Discrete-element methods for stability analysis of complex structures." the Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society, Dec. 1968.
- 26) D. W. Murray, E. L. Willson: "Finite-element large deflection analysis of plates", A.S.C.E., Feb. 1969.
- 27) 藤田 譲, 川合忠彦, 大坪英臣, 湯原哲夫: 高軸力をうけるフレーム構造の大たわみ弾塑性問題の一解法, 日本鋼構造協会第三回大会研究集会マトリックス構造解析講演論文集, 昭和44年5月30・31日.
- 28) D. W. Murray, E. L. Willson: "Finite-element Post-buckling analysis of thin elastic plates", A.I.A.A., Oct. 1969.
- 29) A. Pifko, G. Isakson: "A finite-element method for the Plastic buckling analysis of plates", A.I.A.A., Oct. 1969.

Appendix 1

歪エネルギーの計算(本文 2.3)に対する補足説明

部材内の変位ベクトル $u(x)$ を12式より,

$$u(x) = f(x) \mathbf{a} \dots\dots\dots (A-1)$$

と表わすと,部材内の歪 $\epsilon_x(x)$ は大変形による影響を考慮するため, A-1 式の微分式に関する2次式が加えられて, 本文 28,29,30 式を11式に代入して得られるように

$$\epsilon_x(x) = g(x) \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{h}(x) \mathbf{a} \dots\dots\dots (A-2)$$

ただし

$g(x)$ は (1×8) のベクトル

$h(x)$ は (8×8) のマトリックス

のようにまとめられる。

部材内にたくわえられる歪エネルギー U は初期応力 σ_0 を考慮して 31, 37 式より,

$$U = \iiint_V \left\{ \sigma_0 \epsilon_x(x) + \frac{1}{2} E \epsilon_x^2(x) \right\} dV \dots (A-3)$$

となる。

この式に A-2 式を代入すると A-4 式が得られる。

$$U = \iiint_V \left[\sigma_0 \left\{ g(x) \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^T h(x) \mathbf{a} \right\} + \frac{1}{2} E \{ g(x) \mathbf{a} \}^2 \right] dV \dots\dots\dots (A-4)$$

(ただし, 本文で示したように, A-2 式2項は A-3 式項へ代入する際, 微小項として省略した。)

ここで得られた A-4 式を本文に記した 34, 35, 36, 39, 40, 41 式に関連させると次のようになる。

$$\begin{aligned} \iiint_V \sigma_0 g(x) \mathbf{a} dV &= \mathbf{a}^T \iiint_V \sigma_0 g^T(x) dV \\ &= \mathbf{a}^T (A_1 - A_2) \dots\dots\dots (A-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \sigma_0 \frac{1}{2} \mathbf{a}^T h(x) \mathbf{a} dV &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \iiint_V \sigma_0 h(x) dV \mathbf{a} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T A_1 \mathbf{a} \dots\dots\dots (A-6) \end{aligned}$$

$$\iiint_V \frac{1}{2} E \{ g(x) \mathbf{a} \}^2 dV$$

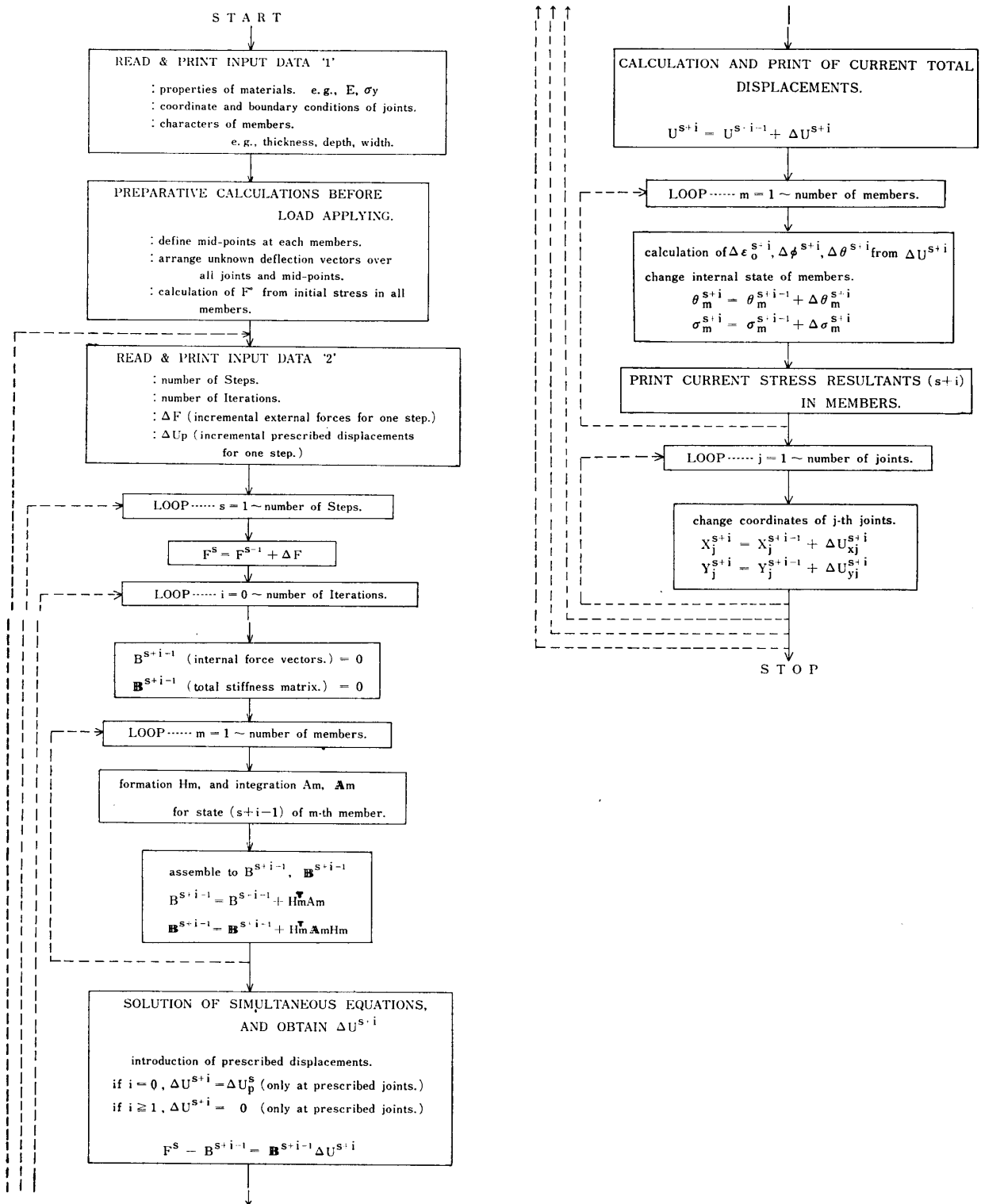
$$= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \iiint_V E \mathbf{g}^T(x) \mathbf{g}(x) dV \mathbf{a}$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4) \mathbf{a}$$

.....(A-7)

ただし A-7 式の $\mathbf{g}^T(x) \mathbf{g}(x)$ は (8×8) マトリックスである。

Appendix 2 Flow Chart



U.D.C. 624.074 : 539.4

THE NON-LINEAR STRESS ANALYSIS FOR THE ARBITRARY PLANE STEEL FRAMES

by Dr. MORIHISA FUJIMOTO, Prof., Tokyo Institute of Technology, Dr. FUKUZO SUTO, Chief, Computer Division, NIKKEN SEKKEI LTD., and AKIRA WADA, Staff, The same above., Members of A.I.J.

Next two phenomena must be considered for the exact structural analysis of non-linear problem :

- 1) Material non-linearity; Non-linearities arising from material properties.
- 2) Geometric non-linearity; Non-linearities caused by large deflections.

On this paper, numerical analysis of arbitrary plane steel frames considering above two non-linearities is demonstrated by the Matrix Methods based on the variational principle and the Step by Step Method.

U.D.C. 620.173 : 624.074

TEST ON WELDED STEEL TRUSSES ADOPTED T-STRUCTURAL SHAPE FOR CHORD MEMBERS AND STEEL TUBE FOR WEB MEMBERS

Part 5.1 : Elastic Behaviors

by Dr. KOICHIRO YAMADA, Prof., Fukui Univ., Member of A.I.J.

It has been known experimentally that the strength and rigidity of the welded steel trusses of tubular construction will often be decreased by the local deformations taken place at their panel points.

Therefore in order to make these local deformations as small as possible and to utilize the merits in the structural shape-trusses, the author devised a welded steel truss in which the T-structural shape (half the H-structural shape) is adopted for its chord members and the steel tube for its web members. In this welded steel truss we shall be able to adopt two kinds of panel points in the construction of its panel points, such as the eccentric and non-eccentric panel points.

In this paper a type of above mentioned welded steel trusses is treated, of which the panel points are non-eccentric panel ones. A specimen is tested to find its strength and rigidity in elastic range under the vertical concentrated loading at a panel point of its upper chord member, and the results in this test are discussed in comparison with the results of the theoretical analysis on consideration of the second stresses for the welded steel trusses.

The results are as follows.

The elastic behaviors of the specimen in the test were found to satisfy most of the results of the theoretical analysis and the foundation to get a elasto-plastic analysis for this welded steel trusses was established.

U.D.C. 624.078 : 539.4

THEORY OF THE FRAME WITH ELASTIC JOINTS (2)

An Elastic Analysis of the Frame with Elastic Joints (2)

by HOKATO EGAMI, Assisat Prof. of Fukui Univ. Member of A.I.J.

In the previous paper, the author reported the theory of the Chain Construction with Elastic Joints from the result of the experimental study on the Sandwich Curtain Wall. And the other paper dealt with a practical analysis in the framework with Elastic Joints regarded as a structural member which may be deformed as well as a beam or a column. Namely the structural members connected to a joint rotate in proportion the bending moment acting on those end of the members and the rotation may be caused by the shear deformation of the joint panel. Then it was assumed that bending deformation of the panel is disregarded and the panel part in joint is enclosed with rigid members whose ends are hinged. The present paper deals with the elastic analysis of the frame with panel joints which rotates and is deformed by shearing force.