

不安定構造物の解析法に関する研究

正 会 員 和 田 章*
正 会 員 久 保 田 英 之**

1. 序

1.1 目 的

静的非線形構造解析を数値計算として行う際に生じる最も困難な問題は、構造物が不安定になり剛性方程式の解が求められなくなること、または収束計算を行っても不釣り合い力が解除できず振動または発散してしまうことである。

本論文ではこのような剛性方程式の解が不能あるいは不安になるような問題に対し、近似解を一つの解として設定することにより非線形構造解析を続行させる方法、および材料非線形問題を扱う際に生じる不釣り合い力を載荷経路を制御することにより合理的に解除する方法について論じる。

1.2 不安定問題に関する従来の解析法

不安定問題のうち、形状決定問題についてはこれまでも数多くの研究がなされてきたが、これらには大きく分けて以下に示す2通りの手法がある。

- (a) 要素のひずみと節点変位、応力と節点力のそれぞれの関係を評価する。
- (b) 幾何剛性を考慮し、剛性方程式を解く際に工夫する。

(a) の方法によったものには川股ら^{1),2)}あるいは半谷ら³⁾⁻⁶⁾などの例がある。

川股らは、リンク機構が任意の節点荷重を受けるときの釣合形状解析の基礎式をポテンシャルエネルギー最小の原理に基いて定式化し、混合法により非線形方程式を導くことにより、ケーブルネットの解析を行った。半谷らはトラス構造の幾何学的適合条件と荷重条件とから安定化移行過程を解析する方法を提案した。

一方、(b) の手法には例えば Turner ら⁷⁾あるいは後藤ら⁸⁾の例などがある。Turner らは大変形問題における幾何剛性マトリックスの考えを明らかにした。後藤らは剛性マトリックスを線形項と幾何剛性による非線形項に分離し、線形項から得られる剛性方程式の解を初期値とした反復解法を用いることにより、非線形方程式にお

ける解の収束性を高める手法を提案した。

(a) の方法はケーブル構造やトラス構造などの線材のみからなる構造物に対しては変形のほかに剛体変位モードが算出できるなど有効であるが、一般の有限要素法と混用することは困難である。それに対して (b) の後藤らの方法は解析法としての汎用性はあるが、幾何学的非線形以外に材料の降伏および部材の破断現象を含んだ非線形性も考慮しようとする適用が難しいと考えられる。

一方、通常の Newton-Raphson 法では解析が困難な幾何学的非線形性の強い構造物を解析する方法として、Riks⁹⁾ は荷重ベクトルと変位ベクトルとによって張られる空間における釣り合い経路上のベクトルのノルムとして定義される弧長をパラメータに加える解決法を提案している。この手法は確かに幾何学的非線形のように連続的に状況が変化するものに対しては有効であるが、先に述べたような部材の破断現象等の不連続を伴う材料モデルを用いた場合に生じる不安定問題に対しては有効でないと考えられる。

1.3 本研究の手法の概要

本研究の手法は解析対象とする構造物が安定な場合は通常の有限要素法を用いた非線形解析法と同じである。

初期形状が定まらないために不安定な構造物、あるいは解析途中で構造物が不安定になった構造物の場合には、剛性マトリックスが特異である、あるいは正則でない、などの理由で通常の連立方程式の解法では解が求められない。この場合には、剛性マトリックスに Appendix 1 で述べる特異値分解を施すことにより剛性方程式の最適近似解を求め、解析を進行させる。生じた誤差は収束計算 (iteration) により解消させる。

一方、部材の力学的挙動の不連続性に起因する不安定現象により解析不能な状態に陥ることを避けるため、4.2 で述べる載荷経路をとりながら解析を進行させる。

以上述べたことを含め、全体のフローチャートを図 1 に示す。

2. 剛性方程式の解法

2.1 構造物の剛性方程式

構造物を離散化し、非線形問題においても微少な増分

* 東京工業大学 助教授・工博

** 東京工業大学 大学院生

(昭和 62 年 11 月 10 日原稿受理)

間での線形変化を仮定することにより，剛性方程式として次のような連立1次方程式を作ることができる。

$$Ax=y \dots\dots\dots (1)$$

- A: 剛性マトリックス (n×nのマトリックス)
- x: 収束計算中の増分変位ベクトル(n元のベクトル)
- y: 外力と内力の差から求められる不釣り合い力ベクトル (n元のベクトル)

この連立1次方程式の解を一意に定めることが可能ならば，収束計算中における増分変位ベクトルが定まり，

解析が進められることになる。

連立方程式(1)の解ベクトル x が存在するためには， A の部分空間 $S(A)$ に対して

$$y \in S(A) \dots\dots\dots (2)$$

が必要十分条件である。

安定な構造物では A は正則であり， A の階数 (rank) r が n と等しくなるので (2) の条件を満たす。 A に対して逆マトリックス A^{-1} が存在するので，(1) の解 x は形式的には

$$x=A^{-1}y \dots\dots\dots (3)$$

と書けるが，実際には逆マトリックスを求めることは数値解析上不利であるので，連立1次方程式を解くことになる。この連立方程式の解法としてはさまざまなものが知られ， A の性質，計算機システムの特徴などによって最適なものを選ぶ必要がある。例えば A が特異に近い場合，あるいは A の要素の中に極端に絶対値が異なるものが存在する場合には，部分軸選択を用いたガウス消去法などを用いて精度を確保する必要がある。

2.2 不安定構造物における剛性方程式の解法

不安定な構造物に対して前節と同様に剛性マトリックスを作成すると， A が正則にならない場合，あるいは特異になる場合がある。

作成された剛性マトリックス A について，(2) 式が満たされる場合には，連立方程式 (1) の解は存在して (4) 式で求められる。

$$x=A^{-1}y+(I-A^{-1}A)z=A^{-1}y+Rz \dots\dots\dots (4)$$

ここに $R=I-A^{-1}A$ ， A は Appendix 2 で述べる A の一般逆マトリックス， I は $n \times n$ の単位マトリックス， z は任意の n 元のベクトルである。この x は一意に定まるものではない。

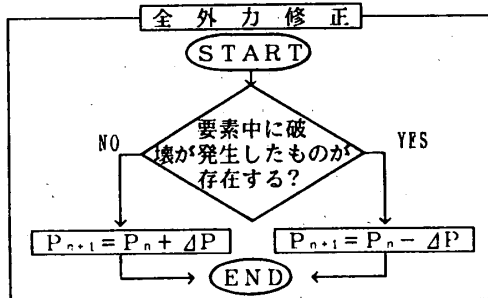
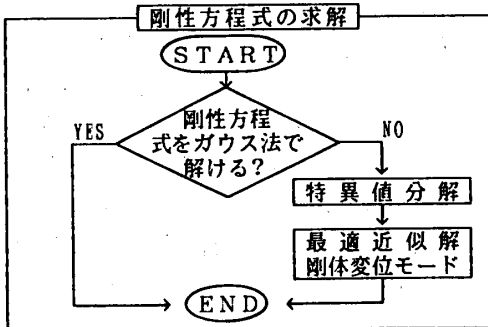
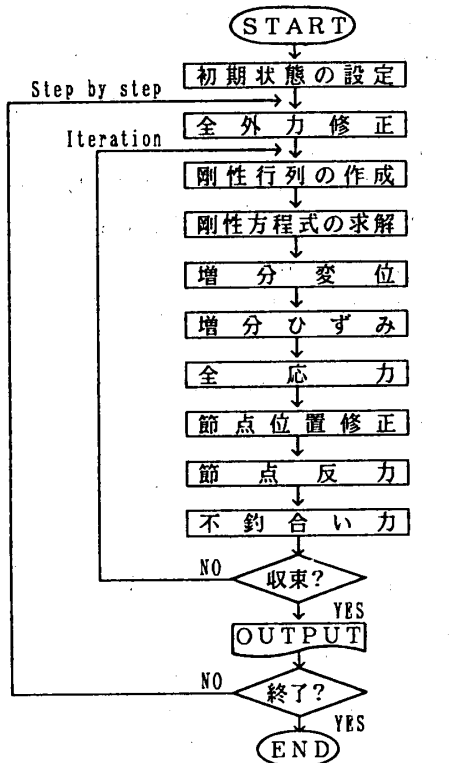
作成された剛性マトリックス A について，(2) 式が満たされない場合には解ベクトル x は存在しない。本研究ではこのような場合に，生じる誤差のベクトル $Ax-y$ のノルムが最小となるものをこの連立方程式 (1) の近似解として選ぶ。Appendix 2 で述べる Moore & Penrose 一般逆マトリックス A^+ を用いて (5) 式のようにベクトル x を作る。

$$x=A^+y+(I-A^+A)z=A^+y+Rz \dots\dots\dots (5)$$

ここに $R=I-A^+A$

A^+ が A の最小2乗型の一般逆マトリックスであるということから，この x は誤差のベクトル $e=Ax-y$ のノルム $\|e\|$ を最小にする。力学的には e は不釣り合い力ベクトルを表すから，(5) 式のベクトル x の力学的意味は「不釣り合い力のノルムが最小となるベクトル」である。

実際には (2) 式を満たす場合には A^+ は A^{-1} に一致するから，(4) 式は (5) 式の特殊な場合とみなせる。以後，(4) 式および (5) 式を (5) 式で代表させる。



P_n : n stepにおける全外力
 ΔP : 増分外力

図-1 フローチャート

(5) 式で得られた解は力学的な条件のみから得られたものである。したがって、得られた変位は剛体変位を含んでいる。この剛体変位を表す項が(5)式の R である。なお剛体変位モードについては2.3で述べる。

(5) 式で表される集合の中で(1)式の解を一意に定めるため、解の集合の中でそのノルムが最小となるものを選ぶ。 A^+ が A のノルム最小一般逆マトリックスであるということから、

$$x = A^+ y \dots\dots\dots(6)$$

がこの条件を満たす。

(6) 式の x は力学的には「不つり合い力が最小となりかつ増分変位も最小となるベクトル」である。(6) 式の x を連立1次方程式(1)の最適近似解と呼ぶことにする。

A が正則の場合に A^{-1} を求めなくてよいことと同様に、実際には A^+ は求める必要はなく、Appendix 2 で述べる特異値分解の結果から得られる V, D, U を用いて

$$x = (V(D^{-1}(U^T y))) \dots\dots\dots(7)$$

とした方が計算効率に優れている。

2.3 剛体変位モード

(5) 式の第2項、すなわち Rz が剛体変位を表す。

$R = I - A^+ A$ の階数は $n - r$ であるから、 R の基底 p_1, \dots, p_{n-r} がこのときの剛体変位モードになる。言い換えれば、剛体変位は R の基底によって張られる空間に無数に存在することになる。Appendix (A-1) 式に示す A の特異値分解の結果から R は次のように書ける。

$$\begin{aligned} R &= I - A^+ A \\ &= I - V \begin{bmatrix} D_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T U \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T \\ &= I - V \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

この R からその基底すなわち剛体変位モードを抽出する方法は Appendix 3 に示す。

以上述べたように、構造物の剛体変位モードを求めるためには、 A^+ を求める必要はなく、剛性マトリックスの特異値分解によれば良いことがわかる。

3. 数値解析例(1)

3.1 大変形を考慮した3次元トラス要素

本論文で解析例としてあげているものは図-2のようなトラス構造物である。ここでは大変形問題も扱うため、要素剛性マトリックスとして軸力の影響を考慮した(9)式に示すマトリックスを用いる。部材軸力の計算に用いる部材の伸縮は、両端の節点の最新の座標から求めた長さとの差によって求める。

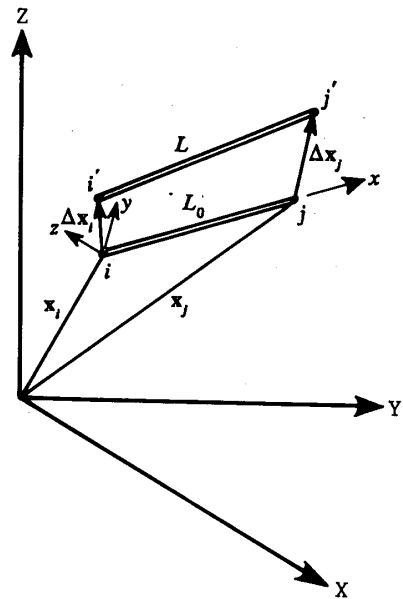


図-2 大変形を考慮した3次元トラス要素

$$\begin{Bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{iz} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \\ f_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & -K & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N}{L} & 0 & 0 & -\frac{N}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{L} & 0 & 0 & -\frac{N}{L} \\ -K & 0 & 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{N}{L} & 0 & 0 & \frac{N}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{N}{L} & 0 & 0 & \frac{N}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \\ d_{iz} \\ d_{jx} \\ d_{jy} \\ d_{jz} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(9)$$

ここに、

- f_{kv} : 増分節点力
- d_{kv} : 収束計算中の増分変位
- $k \in \{i, j\}$: 節点番号
- $v \in \{x, y, z\}$: 局所座標
- $K = A_0 E / L_0$: 要素剛性
- N : 軸力
- L_0 : 初期の部材長
- A_0 : 初期の断面積
- E : ヤング係数

である。

なお本章で扱う例では部材を構成する材料は常に弾性であるとする。

3.2 不安定構造物の形状が決定するまでの過程

最も簡単な例として図-3に示す不安定な1要素に荷重を作用させ、安定するまでにたどる経路を示す。

表-1には各収束計算での要素の状況、解いている連立方程式およびその解、階数、不安定なときは生じている剛体変位モード、および累積の変位ベクトルを示す。なお、表中のベクトルおよびマトリックスの成分は点Bの x 方向変位、 y 方向変位の順に示している。また図-3中にはそれぞれの収束計算における節点の位置等を示す。最初の収束計算では、部材軸方向には剛性を有す

表一 不安定構造物における収束までの状況の変遷

収束回	0	1	2	3	4
軸力	0.000	0.500	2100.	0.974	1.00
軸方向変位	0.000	0.0238	100.	0.0464	4.76E-02
剛性	21.0	21.0	21.0	21.0	21.0
方向余弦	{ 0.866 -0.500 }	{ 0.866 -0.500 }	{ -1.26E-09 -1.00 }	{ -1.26E-09 -1.00 }	{ -1.26E-09 -1.00 }
不釣りあいベクトル	{ 0.000 -1.00 }	{ -0.433 -0.750 }	{ 2.66E-06 2100. }	{ 1.23E-09 -2.63E-02 }	
剛性マトリックス	[15.8 -9.09 -9.09 5.25] ⁻¹	[15.8 -9.09 -9.09 5.25] ⁻²	[10.5 -1.33E-08 -1.33E-08 21.0]	[9.73E-03 -2.65E-08 -2.65E-08 21.0]	
増分変位ベクトル	{ 0.0206 -0.0119 }	{ -86.6 -150. }	{ -1.27E-07 100. }	{ 1.23E-09 -2.63E-02 }	
ランク	1	2	2	2	
剛体変位モード	{ 0.500 0.866 }				
変位ベクトル	{ 0.0206 -0.0119 }	{ -86.6 -150. }	{ -86.6 -50.0 }	{ -86.6 -50.0 }	

*1 [15.750 -9.0934
-9.0934 5.2501] *2 [15.752 -9.0913
-9.0913 5.2539]

自由度1 : 節点2のx方向変位 自由度2 : 節点2のy方向変位

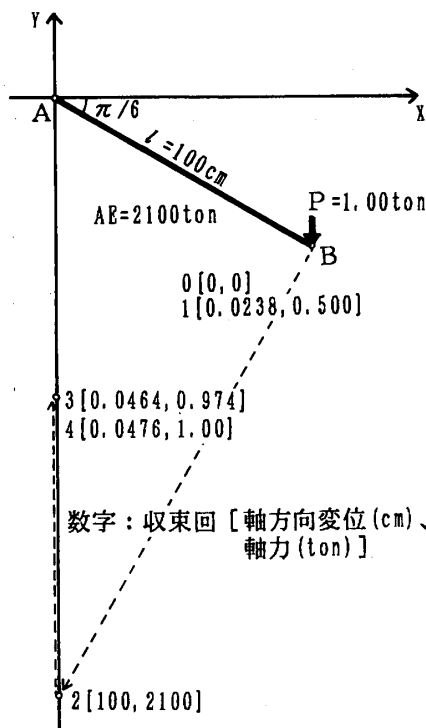


図-3 不安定構造物の形状決定までの軌跡

るが、その直交方向には剛性を持たないため、剛性方程式の未知数2に対して剛性マトリックスの階数が1となり、通常の連立方程式の解法では解くことができない。本研究で用いている手法では、この時には最適近似解を用いる。この解により点Bは材軸方向に移動する。以後、この要素には引張軸力が発生するので、剛性マトリックスの階数は2となる。この後の節点Bの収束計算中の動きを見ると、節点Aのまわりに回転運動を起こし、その回転の接線方向へ動いたあと徐々に不釣り合い力を解除しながら荷重と軸力とがつり合う点に移動してゆく軌跡を描く。

このように、本解析法により初期の不安定形状から最終的に安定状態へ遷移している状況を追跡できることがわかる。

3.3 懸垂線の形状決定問題

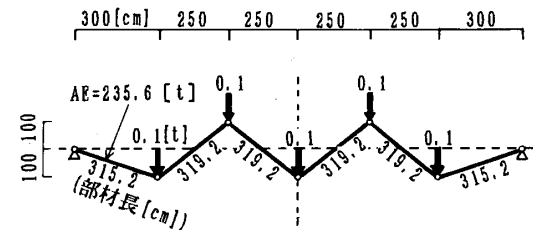


図-4 形状決定問題

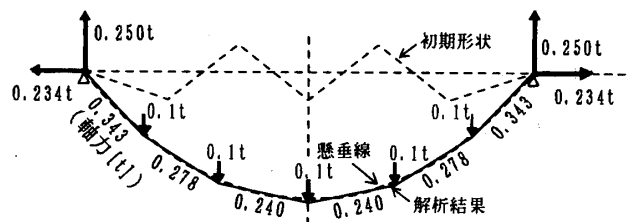


図-5 決定した形状

形状決定問題の一つとして図-4に示す6本の部材からなるリンク構造を解析する。本手法によって得られた安定化形状を図-5に示す。

このような構造物の場合、要素分割を無限に細かくすると、つり合う形状は懸垂線 (Catenary) となることが知られている。図-5の中にこの例と全長の等しい懸垂線を重ねて示す。両者を比較すると本手法の妥当性がわかる。なお、この例では収束までに16回の収束計算を必要とした。

半谷ら⁹⁾は、ひずみ-変位マトリックスに一般逆マトリックスを用いて評価することにより、微小区間における最適移行過程の積み重ねとして形状が決定するまでの過程を同じ例で追跡している。

これに対し、本研究では荷重につり合う形状を直接求める手法を用いている。したがって、初期形状からつり合う形状に至る途中の形状を求めることはできない。しかし最終形状を知ることだけが必要ならば、本研究の手法の方が原理的には簡単である。

3.4 立体リンク構造

通常解析法では、大規模構造物の一部の部材が破壊

し、その近傍の構造が安定を保てなくなった時に、全体が解析できなくなる。この場合、不安定部分を取り除くことにより残りの部分が力の伝達能力を保持していれば解析を続けられることがある。

本研究の手法によれば、このような不安定な部分を含む構造物に対しても矛盾のない解を与え、解析を進めることができる。これを確かめるため、以下のような常に不安定な構造物に対し、本手法を適用する。

図-6のようなリンク構造の一端に下向き(-z方向)の変形を与え、全体の変形を追跡する。図-7に変形の移り変りの様子を示す。どの部材にも軸力が発生しないため、この構造は常に不安定であるが、各部材の長さ変化せず矛盾のない解が得られていることがわかる。

3.5 支持点のない構造物

図-8に示す平面構造物は、外力系がつり合っているため構造物は内部的に安定であるが、支持点がないため

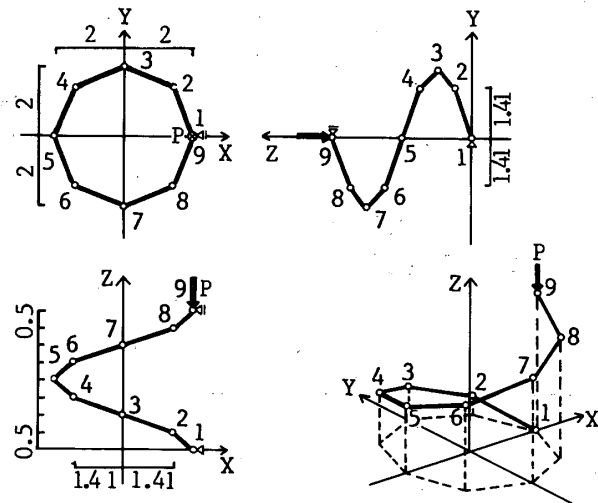


図-6 立体リンク構造

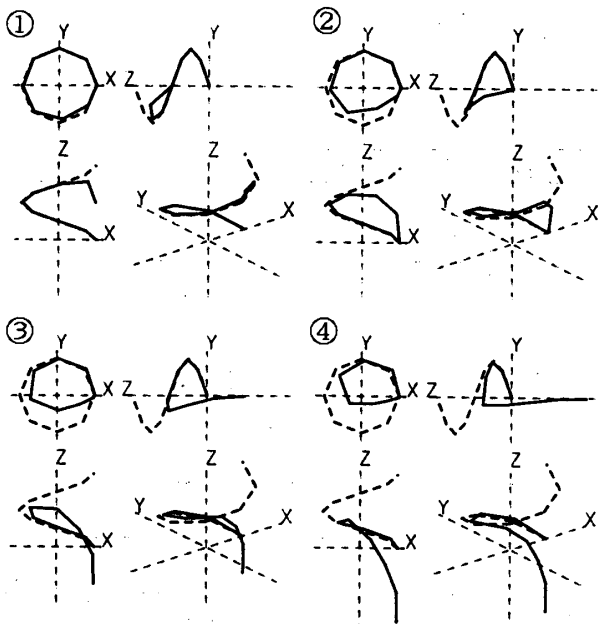


図-7 立体リンク構造の変形

通常的手法では解が不安となる。

本研究の手法を用いて解析を行うと、図-9の解が得られる。この解は、2.3で述べたように不釣り合い力が最小となる解の中で節点変位ベクトルのノルムが最小となるものである。このような宙に浮いているような構造物に対しても解が求められることが本解析法の特徴である。

この構造を安定な静定構造とするためには3つの自由度を固定しなければならないことからわかるように、この剛性マトリックスのランクは全自由度14に対して11と3だけ不足している。この差が2.3で述べた剛体変位の原因となる。剛体変位のモードは(5)式のRの基底が張る空間に無数に存在するため、ここではその中の1組の剛体変位モードを図-10に示す。

図-10の各モードに任意の倍率を乗じて重ね合わせ図-9の変位を加えたものが実際に支持点なしに載荷した問題の一般解である。

4. 部材特性に起因する不安定現象

4.1 部材特性が安定性に与える影響

各種の非線形性を含んだ構造物の解析では、図-11のように、小さな増分外力に対する応答を取束計算に

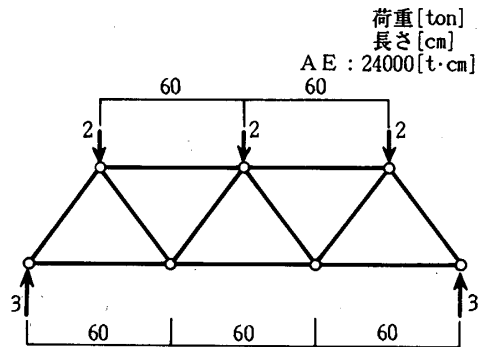


図-8 支持点のない構造物

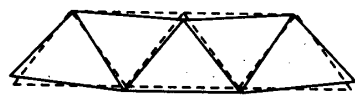
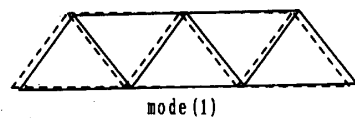
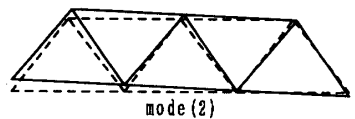


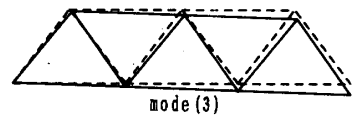
図-9 変形図 (変形倍率 100)



mode (1)



mode (2)



mode (3)

図-10 剛体変位モード

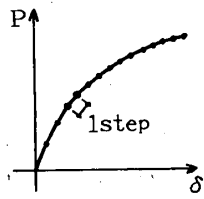


図-11 step by step 法による非線形解析

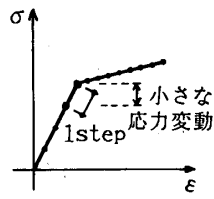


図-12 1 step 当たりの微小応力変動

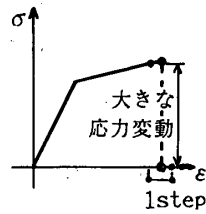


図-13 破壊現象発生による大きな応力変動

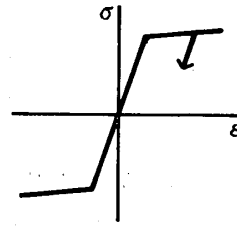


図-14 bi-linear 型応力-ひずみ関係

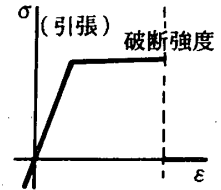


図-15 破断を考慮した応力-ひずみ関係

よって求める、という手順を積み重ねる増分法が一般に用いられる。この手法は1回の増分 step について、図-12のように微小なひずみ増分とそれに対応する応力増分との関係を追跡することによるものである。この手法にひび割れ発生などの破壊現象を材料の力学特性にそのまま取り入れると、図-13のように微小ひずみに対して大きな応力変動が生じ、収束計算によっても収束しなくなるが多い。

4.2 収束計算中の不安定状態の解消法

以下、本研究で用いた、収束計算中の部材の力学状態をできるだけ連続に保ちながら解析を行う手法について述べる。

ここでは3.で用いたトラス構造物を対象として考察する。部材の座屈は考えず、圧縮側では常に弾性とするが、引張側では以下で述べる特性の塑性化および破壊を考慮する。

通常このような構造物を構成するものは鋼に代表される金属材料であり、解析上、応力-ひずみ関係は図-14

のような bi-linear 型を考えることが多い。しかしこの応力-ひずみ関係では、図-15のように部材の破断を考慮したときに、4.1で述べた現象が発生することがある。

このため、本研究では破断する際の応力-ひずみ関係を図-16のように考え、载荷の方法を一方向単純载荷ではなく、減増を何度も繰り返す方法を用いる。外力が0の状態から通常に载荷し、ある荷重 step である部材が破断ひずみを越えたとき、次回の荷重 step では外力を逆向きに载荷する。この逆向き载荷をすべての部材のひずみがその部材の破断ひずみを下回るまで続ける。その後の荷重 step から予定した外力方向に戻し、载荷を続ける。この場合、一度破断ひずみ以上のひずみを経験した部材は、除荷された状態の応力を保持するように塑性剛性を用いる。この後、ある部材が破断ひずみを越えるたびに、以上の経路を繰り返す、载荷を続ける。

5. 数値解析例(2)

5.1 部材の破断現象を考慮した平面トラス構造の解析
図-17のような構造物を例とする。各部材を構成す

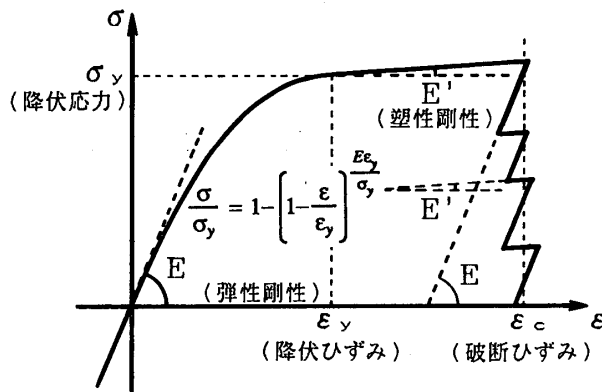


図-16 本解析で用いた応力-ひずみ関係

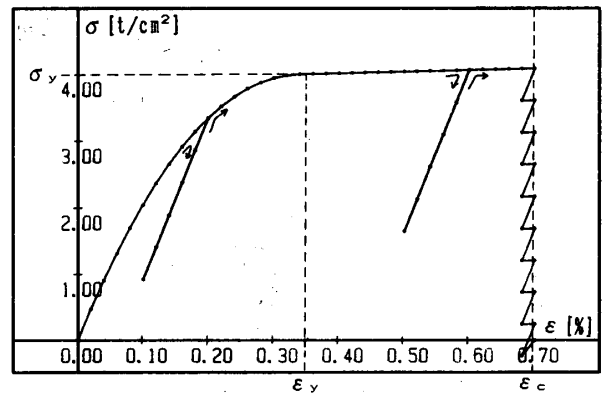


図-18 材料の応力-ひずみ関係

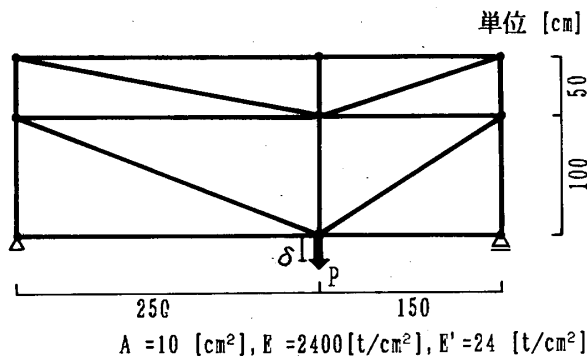


図-17 平面トラス構造の解析例

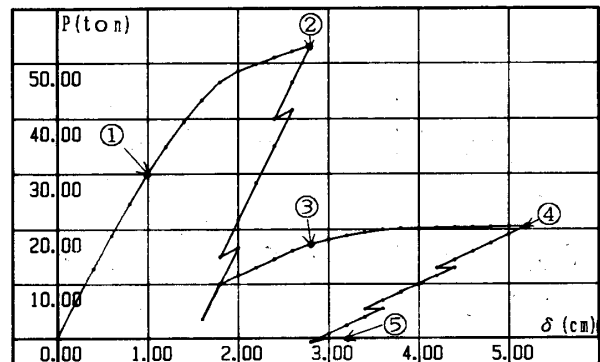


図-19 加力点の変位-荷重関係

る材料，断面はすべて同一とする。材料の応力-ひずみ関係を図-18に示す。荷重は図-17に示すように中央

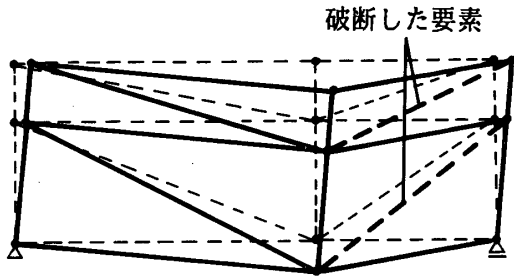


図-20 部材が破断し不安定になった後の変形図

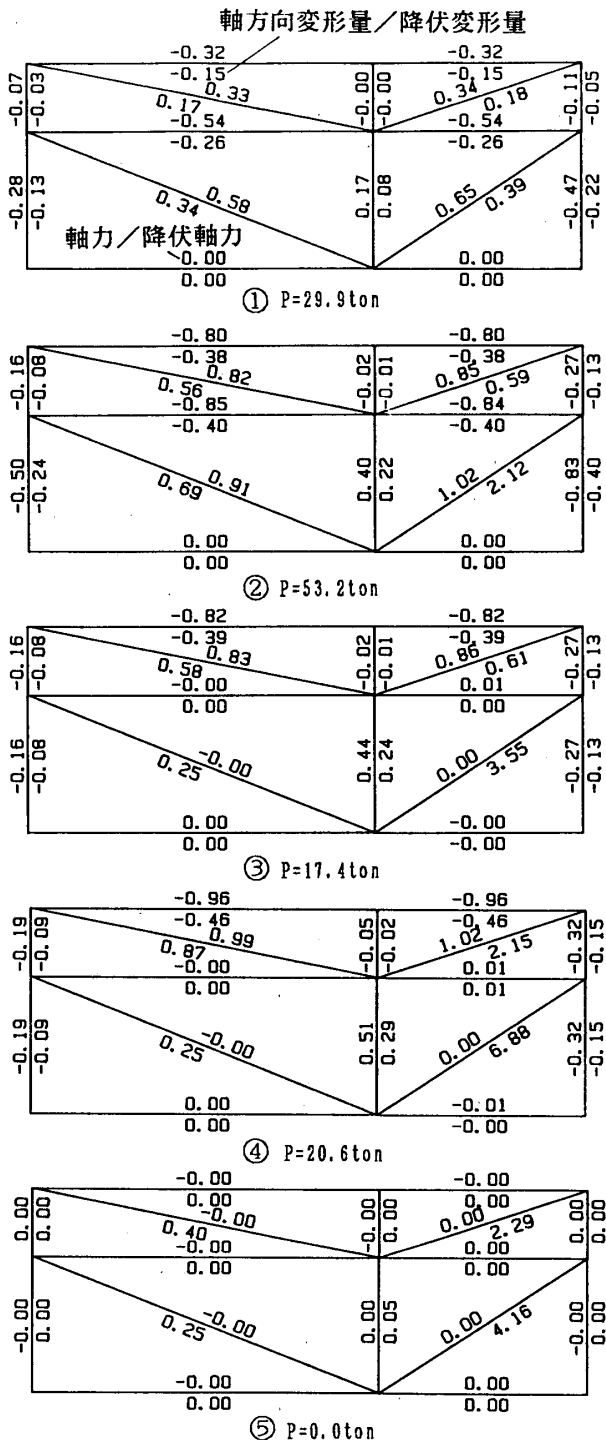


図-21 部材の軸力変形の状況

下段の節点に対して変位制御で行う。

図-19に加力点の変位と荷重の関係，図-20に部材が破断した後の変形図を示す。また図-21に図-19中に示した各点における各部材の軸力と変形を，それぞれ降伏軸力と降伏変形量との比で示す。これらの結果から，部材が破断することによる不安定現象を含んだ問題を，最終的に構造物が力を保持できなくなるまで解析できることがわかる。なお，本解析例で用いた材料特性の影響で，引張力を受け降伏前の段階で除荷された部材には，最終的に荷重を支えられなくなった段階においても残留変形が生じている。

5.2 部材の破断現象を考慮した立体構造の解析

図-22に示す構造物を解析対象とし，節点31~33の3点をこの3点の作る平面が水平を保つように変位制御でz方向に荷重する。各節点の座標および拘束条件を表-2に示す。部材はすべて同一材料で，21-22および23-21を除く各部材はすべて同一断面積である。21-22はほかの部材の0.9倍，23-21は1.1倍の断面積とする。本例は，[1]初期の状態では剛性マトリックスの階数が不足している不安定構造物であるが，[2]21-22，

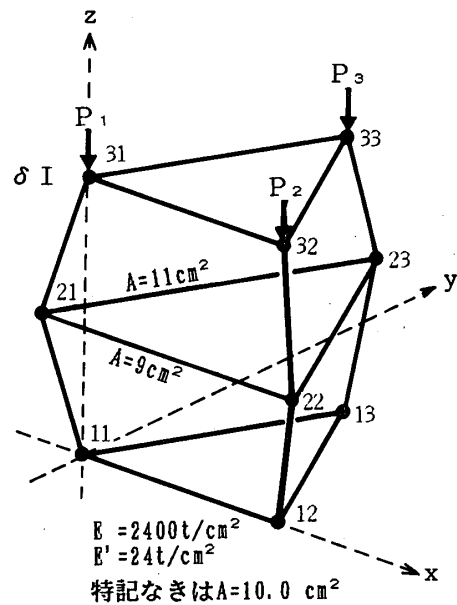


図-22 立体構造物の例

表-2 節点の座標と拘束条件

	節点座標			拘束した変位成分
	x	y	z	
11	0	0	0	xyz
12	300	0	0	yz
13	150	260	0	z
21	-43.3	-25.0	200	
22	343	-25.0	200	
23	150	310	200	
31	0	0	400	xy[z]
32	300	0	400	y[z]
33	150	260	400	[z]

[z]: z方向への強制変位

22-23, 23-21 の 3 部材が弾性で引張力を負担している間は安定構造物となる, [3] この 3 部材のうちいずれかが降伏し変形が増大すると, 一種の座屈現象が発生し, 全体の支える荷重が低下する, [4] この 3 部材のうちいずれかが破断すると, 安定ではなくなり荷重を支えられなくなるという性状を示す構造物である。

図-23 に点 31~33 の鉛直変位と発生する反力の和との関係を示す。また, 21-22, 22-23, 23-21 の 3 部材の軸力と軸方向変形とを, 各部材の降伏軸力・降伏変形量との比で図-24 に示す。21-22 部材の降伏のため, ほかの引張部材 22-23, 23-21 の軸方向変形量・軸力が除荷

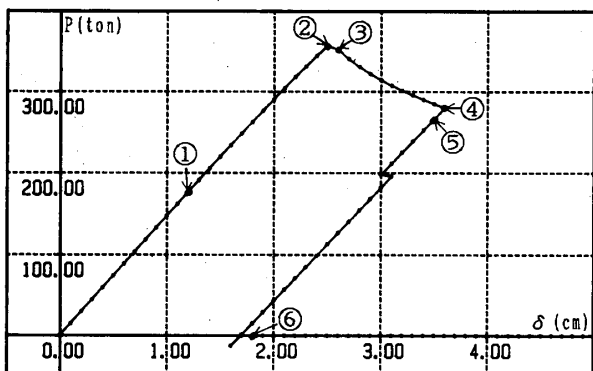


図-23 変位-荷重関係

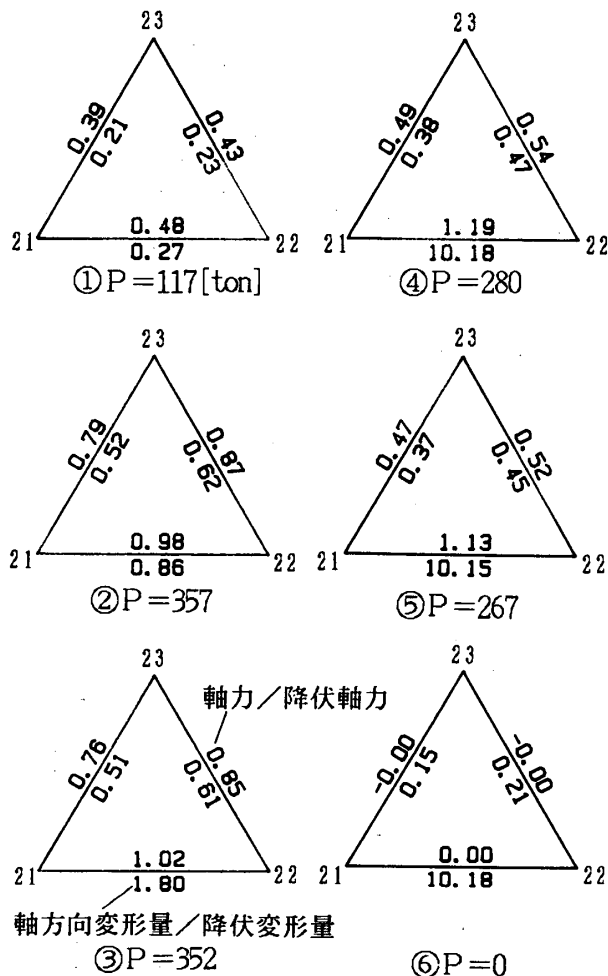


図-24 発生した軸力と変形

されていることがわかる。最終的にはこの降伏した 21-22 部材が破断することによって, 荷重を保持できなくなることが表れている。

このような立体弾塑性・大変形問題に対しても本解析法を用い得ることを示した。

6. 結論

本研究によって得られた結論を以下に述べる。

(1) 剛性マトリックスが特異である, あるいは正則でない剛性方程式に対し, 剛性マトリックスを特異値分解することにより最適近似解を求める手法は全体の構造に対し矛盾する解をもたらすことはなく極めて有効である。剛体変位モードを同時に求められることも利点である。

(2) 応力-ひずみ関係に不連続な特性を有する材料からなる部材を含む構造物を解析する場合には, 部材の応力状態が急変した場合につり合い状態が存在しない事態が起こりうる。この場合, 材料の力学特性を連続的にとらえ, 載荷経路を制御することで, 解を得ることができる。

参考文献

- 1) 真柄栄毅, 国田二郎, 川股重也: 混合法によるケーブルネットの解析その(1)不安定架構の性質およびリンク機構の解析, 日本建築学会論文報告集, No. 218, pp. 37-48, 1974. 4.
- 2) 真柄栄毅, 国田二郎, 川股重也: 混合法によるケーブルネットの解析その(2)幾何学的非線形問題の厳密解, 日本建築学会論文報告集, No. 220, pp. 35-45, 1974. 6.
- 3) 田中 尚, 半谷裕彦: 不安定トラスの剛体変位と安定化条件, 日本建築学会構造系論文報告集, No. 356, pp. 35-43, 1985. 10.
- 4) 田中 尚, 半谷裕彦: 不安定トラスの剛体変位と自己応力(1)基礎式とトラスの分類, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 2581-2582, 1984. 10.
- 5) 田中 尚, 半谷裕彦: 不安定トラスの剛体変位と自己応力(2)有限剛体変位と安定化条件, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 2583-2584, 1984. 10.
- 6) 川口健一, 半谷裕彦: 不安定剛体トラスの安定化移行過程における最適移行条件, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 1201-1202, 1987. 10.
- 7) Turner, M. J., Dill, E. H., Martin, H. C., and Melosh, R. J.: Large Deflections of Structures Subjected to Heating and External Loads, *Journal of the Aero/Space Science*, pp. 97-106, 1960. 2.
- 8) 後藤茂夫, 大津幸紀, 大槻 護, 新村祐南: 非線形有限変形法(大変形法)によるトラスの大変形解析とその応用プログラム, 土木学会論文報告集, No. 194, pp. 55-69, 1971. 10.
- 9) Riks, E.: Some Computational Aspects of the Stability Analysis of Nonlinear Structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 47, pp. 219-259, 1984.
- 10) 柳井晴夫, 竹内 啓: 射影行列・一般逆行列・特異値分

解, 東京大学出版会, 1983.

Appendix

A.1 マトリックスの特異値分解¹⁰⁾

以下, 特に断わらない限りここで扱うマトリックスは $n \times n$ の正方であるとする。また I は単位マトリックスであり, マトリックス M_m は M が $m \times m$ であることを示している。さらに, M^T はマトリックス M の転置を表すものとする。

階数が r のマトリックス A において, λ_j ($j=1, \dots, r$) をマトリックス $A^T A$ のゼロでない固有値とする。 A は次のように分解できる。

$$A = UDV^T \dots\dots\dots (A-1)$$

ここに U, V はともに直交マトリックスであり, また

$$D = \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A-2)$$

$$D_r = \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_r \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A-3)$$

である。この $\mu_j = \sqrt{\lambda_j}$ ($j=1, \dots, r$) はマトリックス A の特異値 (singular value) と呼ばれ, (A-1) 式は A の特異値分解と呼ばれている。

特に A が正則のとき, (A-1) 式は固有値分解と呼ばれ, D は次のように書ける。

$$D = \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A-4)$$

ここに, ν_j ($j=1, \dots, n$) は A の固有値である。

A.2 一般逆マトリックス¹⁰⁾

A の部分空間を V, V の補空間を W とする。特異値分解の結果を用いて, 次のマトリックスを定義する。

$$B = V \begin{bmatrix} D_r & S_1 \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} U^T \dots\dots\dots (A-5)$$

ここに S_1, S_2, S_3 はそれぞれ $r \times (n-r), (n-r) \times r, (n-r) \times (n-r)$ の任意マトリックスである。

この B は A の一般逆マトリックスと呼ばれているもので, 通常 A^+ と書かれる。一般逆マトリックスは正則なマトリックスにおける逆マトリックスの概念を一般化したものである。具体的には A に対して次の条件を満たすことが, B が A の一般逆マトリックスとなるための必要十分条件である。

$$ABA = A \dots\dots\dots (A-6)$$

この B の特殊な場合として

$$C = V \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T \dots\dots\dots (A-7)$$

を考えると, この C は

$$ACA = A \dots\dots\dots (A-8)$$

$$CAC = C \dots\dots\dots (A-9)$$

$$(AC)^T = AC \dots\dots\dots (A-10)$$

$$(CA)^T = CA \dots\dots\dots (A-11)$$

を満たす。

(A-8), (A-9) を同時に満たす C を A の反射型一般逆マトリックスといい, 方程式 $Ax = y$ に対して

$$y = y_1 + y_2 \dots\dots\dots (A-12)$$

$$y_1 \in V, y_2 \in W$$

としたときに, $Cy_2 = 0$ となる性質がある。

(A-8), (A-10) を同時に満たす C を A のノルム最小型一般逆マトリックスといい, 方程式 $Ax = y$ に対して, $x = Cy$ の各成分の平方和 (x のノルムの2乗) が最小となる。

(A-8), (A-11) を同時に満たす C を A の最小2乗型一般逆マトリックスといい, 方程式 $Ax = y, y \notin V$ に対して $\|y - Ax\|$ を最小にする。

(A-8), (A-9), (A-10), (A-11) を同時に満たす C は, A の Moore & Penrose 型一般逆マトリックスと呼ばれ, 通常 A^+ と書かれる。なお, 以上述べた A の Moore & Penrose 型を含めた一般逆マトリックスは, A が正則ならば A の逆マトリックス A^{-1} に一致する。

A.3 剛体変位モードの抽出方法

ここでは $R = [r_1, \dots, r_n]$ とした時のベクトルの集合 $\{r_1, \dots, r_n\}$ を r , 求めた R の基底ベクトルの集合 $\{p_1, \dots, p_{n-r}\}$ を p とよぶ。

1. r の中から零ベクトルでない任意のベクトルを選び, p_1 とする。
 2. それまで選ばれた $\{p_1, \dots, p_i\}$ の線形結合としては表すことのできない r の要素を選び, p_{i+1} とする。
 3. 2の操作を p の要素数が $n-r$ 個になるまで繰り返す。
- 以上の手順により求まる $p = \{p_1, \dots, p_{n-r}\}$ は互いに独立であるので, R の基底ベクトルであることがわかる。

SYNOPSIS

UDC : 624. 023. 85 : 624. 074. 7 : 624. 04

A STUDY ON ANALYSIS METHOD FOR INSTABLE STRUCTURES

by Dr. **AKIRA WADA**, Assoc. Prof., Tokyo Institute of Technology, and **HIDEYUKI KUBOTA**, Graduate Student of Tokyo Institute of Technology, Members of A. I. J.

This study is to establish a method to calculate an instable structure in nonlinear structural analysis.

In case stiffness matrix is approximately singular or not regular, derive the optimum approximate solution for a stiffness equation by decomposing the stiffness matrix with the singular value, and then proceed with analysis. A resultant error will be dissolved by convergence calculation.

On the other hand, to calculate an instable phenomenon resulting from the discontinuity of the mechanical behavior of a structural member, analysis will be proceeded while choosing such a loading route as not produce instability.

This method is an improved version of ordinary nonlinear finite element method.

Several analyses have resulted to verify that this method developed in this paper is markedly effective in analysis an instable structure.