

崩壊問題の動的解析法

材料および幾何学的非線形を考慮した鋼構造骨組の動的崩壊解析 その1

正会員 久保田 英 之*

正会員 和 田 章**

1. 序 論

非線形構造解析における増分計算には多くの手法が考えられている。代表的なものとして、変位制御法¹⁾、人工バネ法²⁾、摂動法³⁾、弧長法⁴⁾などがある。しかし、これら静的解析では構造物が不安定になり剛性方程式の解が求めにくくなる、あるいは破壊時に大きな不釣り合い力が発生し収束計算では解除できなくなることがある。筆者らはこれらの場合の解決方法を文献5)、6)で提案した。この方法は、1° 構造物の釣り合い方程式が不能あるいは不定となる場合に最適近似解を用いる、2° 材料特性に含まれる不連続性に起因する大きな不釣り合い力を解除する場合に不連続部分を補間する、ことにより数値解析を続行させるようにしたものである。

上に述べた手法は釣り合いをできるだけ忠実に追跡しようとするものである。しかし、すべての力学現象はたとえその変化が緩いとしても広義の動的問題と考えることができる。特に不安定な構造物は静止していることは事実上ありえない。また破壊を伴う現象は必ず周囲の変形を伴う。構造物には重量があるのでその運動状態が変化すれば慣性力が必ず作用する。以上の理由により、不安定になるこれらの現象を、釣り合い状態の変化として静的に扱うよりも、運動状態の変化としてとらえた方が実現象に忠実であると考えられる。

構造物の一部が破断しほかの部分が健全である場合に、全体剛性マトリックスが部分の破断のために特異になってしまう問題がある。このような問題に対して動的解析法を適用した場合、部材破断による急激な状態の変化は質量の存在により抑えられる。また、部分的な破壊が生じた後にもそこに質量を付加しておけば外力に対して釣り合う加速度が生じることにより、その部分が運動を起こすのみで、ほかの健全な部分の構造解析に障害を与えることはない。このような場合に非線形解析を動的に扱うことは有効であると考えられる。

現象を動的と考えることはシェル構造を対象に古くか

ら多くの研究者によって行われている。例えば Humphreys⁷⁾ はさまざまな外力について応答解析を行うことにより動的座屈荷重を求める方法を示した。そのほか、軸対称シェル、浅いシェルあるいは深いシェルなどの形態のシェルに対し、一様分布荷重・部分的な分布荷重・集中荷重などの荷重パターンに関する動的載荷の影響の研究が多くの研究者によって行われている。その中で例えば Plaut ら⁸⁾ は静的載荷と動的載荷とで座屈荷重が異なることを指摘し、同じ問題を対象として増田ら^{9),10)} も別の数値解析手法によってこれを示した。國枝^{11),12)} はシェル構造物の動的安定問題を理論解析し、面外・面内の2方向に同時に外力が作用する場合の挙動を調べた。

骨組構造への地震力、風による振動以外の動的入力の研究は少ないが、例えば Abrate, Sun¹³⁾ は幾何学的非線形の影響を考慮した動的解析法を用い、トラス構造の動的応答への幾何学的非線形の影響について調べた。

我々の研究^{5),6),14)} は、構造物の崩壊までをできる限り実現象に忠実な解析モデルを設定し数値解析により追跡することを目標としている。本論文では材料および幾何学的非線形を考慮した動的構造解析法の提案と、不安定現象を生じる簡単な例題による解析法の確認について論じる。その2では骨組構造物を対象に数値解析を行い、動的手法を用いることによりその崩壊過程を最終状態で解析できることを示す。

2. 解析方法

2.1 概 要

動的数値解析には運動方程式を短い時間間隔で逐次積分してゆく直接積分法を用いる。手法自体は地震応答解析と基本的には同一であるが、通常崩壊は短時間で発生し一方向に変形が進行するので減衰の影響は考慮しない。

解析で用いる自由度 x およびそれぞれに対応する力 f は、1節点について、(1)、(2)式のように7成分で表す。

$$x = [u \ v \ w \ \theta_x \ \theta_y \ \theta_z \ \dot{\theta}]^T \dots\dots\dots (1)$$

$$f = [X \ Y \ Z \ M_x \ M_y \ M_z \ B]^T \dots\dots\dots (2)$$

* 東京工業大学 大学院生 (現在:日本電信電話株式会社)

** 東京工業大学 助教授・工博

(1989年2月10日原稿受理, 1989年6月28日採用決定)

それぞれ初めの3成分は要素座標系 x, y, z 方向の自由度, 次の3成分は各軸回りの自由度, 第7成分は断面のそりに関する自由度である。閉断面の場合は断面のそりは無視する。以下, 回転および断面のそりを表す自由度を合わせて単に回転自由度と呼ぶ。

回転自由度の項には慣性力および外力は作用せず骨組の各節点における並進運動の項だけに慣性が作用するとし, また構造物の剛性は時刻 t の状態のまま $t + \Delta t$ まで変化しないとすると, 運動方程式は並進自由度と回転自由度とに分離し(3)式のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{x}_r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここに

$\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{x}_r$: 時刻 t から $t + \Delta t$ に亘る間に生ずる増分変位ベクトル

\mathbf{a}, \mathbf{a}_r : 時刻 t における加速度ベクトル

$\mathbf{K}_{11}, \mathbf{K}_{12}, \mathbf{K}_{21}, \mathbf{K}_{22}$: 時刻 t における瞬間剛性マトリックス

\mathbf{M} : 質量マトリックス

\mathbf{f}, \mathbf{f}_r : 時刻 t における内力ベクトル

\mathbf{F} : 時刻 t における外力ベクトル

であり, また添字のないものは並進自由度, 添字 r は回転自由度に関するものを表す。

(3)式から $\Delta \mathbf{x}_r$ を消去すると(4)式ようになる。

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + (\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21})\Delta \mathbf{x} + (\mathbf{f} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{f}_r) = \mathbf{F} \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここで

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21} \quad \dots\dots\dots(5-1)$$

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{f}_r \quad \dots\dots\dots(5-2)$$

と置くと, 並進自由度のみからなる運動方程式(6)式が得られる。

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{K}'\Delta \mathbf{x} + \mathbf{f}' = \mathbf{F} \quad \dots\dots\dots(6)$$

実際には(5-1), (5-2)式に現れる逆マトリックスは求めず, 文献14)に示したスーパーコンピュータのベクトル演算機能を用いた高速解法を用いる。

(6)式を Newmark- β 法を用いて時間積分し, 応答を求める。

運動方程式の時間積分手法には各種ある¹⁵⁾。本研究は最終的には多自由度の解析になるので, 自由振動の最小周期はかなり小さくなると予想できる。そのため積分法は無条件安定であることが望ましく, 中心差分法・線形加速度法のような条件安定は好ましくない。Wilson- θ 法は $\theta \geq 1.37$ で無条件安定であるが, 数値的な減衰性が強い。結局ここでは無条件安定であり精度も悪くない Newmark- β 法 ($\beta = 1/2$: 定加速度法)を用いることにする。

全体のフローチャートを図-1に示す

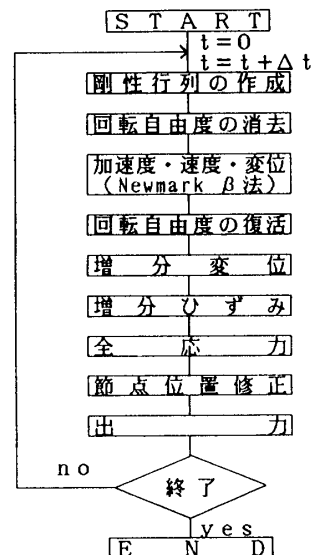


図-1 フローチャート

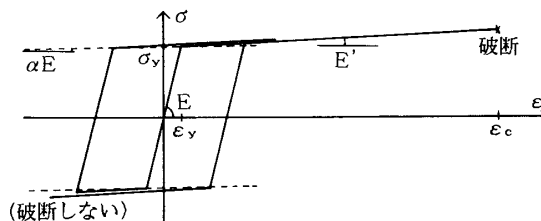


図-2 材料の応力-ひずみ関係

2.2 剛性マトリックスおよび内力ベクトル

剛性マトリックスおよび内力ベクトルの計算法は静的数値解析¹⁴⁾のものと同一であるので, ここでは概要を述べるにとどめる。

一つの部材を材軸方向に分割し, それぞれの分割要素の長さを l として $(1/2 \pm \sqrt{3}/6)l$ の位置において断面を小断面要素に分割する。断面の平面保持を仮定し, 小断面要素の応力-ひずみ関係を追跡し同時に幾何学的非線形を考慮して, それぞれの分割要素について要素剛性マトリックスを求め, これらを一材材について重ね合わせる。部材を分割するのに必要な内部節点には外力を作用させないことおよび部材の中間部の重量を無視し慣性力が作用しないとすることにより, 内部節点の自由度は消去可能である。この消去にも文献14)で述べた高速解法を用いる。

材料の応力-ひずみ関係は図-2に示すものを用いる。引張ひずみが破断ひずみ ϵ_c を超えたときにその要素は破断し, それ以降応力を負担しないものとする。ひずみ速度の剛性・強度への影響は考えない。

さらに, 断面を構成する板の局部座屈は考慮しない。

2.3 質量マトリックス

質量マトリックスは節点に質量が集中しているものとする lumped mass 形を用いる。質量の大きさは, その節点に集まる部材の重量およびこの構造が支えている重量から求める。

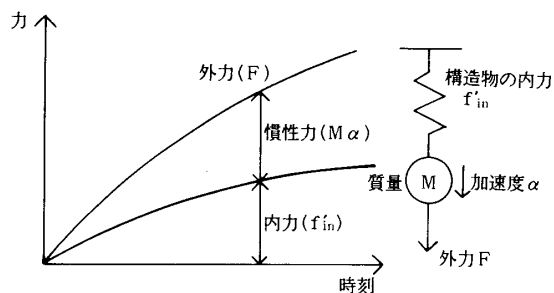


図-3 外力、内力、慣性力の関係

建築構造物の場合、構造物の個々の部材の重量はそれが支えている構造物全体の重量またはそこに流れている力に比べて十分に軽いと考える。そのため、部材の質量を部材の中間に分布させることはせずに、支持している重量も含め構造物の重量によって求めた質量を質点として各部材の交点である節点に集中させることにする。軸力を受ける個材座屈現象においてその部材が持っている自重の効果で動的座屈荷重が向上する現象または浅いアーチに集中荷重が作用する問題において自重の影響により動的座屈荷重が静的座屈荷重より低下する現象⁹⁾等は直接の対象としない。しかし、部材を分割し質量を分布させることにより上記のような問題を扱うことも可能である。

2.4 非線形問題・不安定問題と動的解析法

時刻 $t + \Delta t$ における運動方程式は (6) 式から (7) 式のように書ける。

$$M\alpha + f'_{in} = F \dots\dots\dots (7)$$

ここに M, α, F は先に説明した。 f'_{in} は構造物が変形することにより時刻 $t + \Delta t$ の時点で発揮している内力ベクトルである。この関係を模式的に描くと図-3のようになる。

静的解析の場合は慣性力 $M\alpha$ の項を無視して $f'_{in} = F$ を収束判定の条件としてつり合い方程式を解くことになる。しかし、非線形性の強い構造物、あるいは不安定な構造物では先に述べたようにつり合い経路が追跡困難あるいは不可能になることがある。

動的解析を行う場合は、慣性力の項 $M\alpha$ を考慮し (6) 式の運動方程式を解く。Newmark- β 法によれば、時刻 $t + \Delta t$ の加速度 $\alpha_{t+\Delta t}$ は時刻 t の速度を v_t として (8) 式で求められる。

$$\begin{aligned} (M + \beta \Delta t^2 K_t) \alpha_{t+\Delta t} \\ = F_{t+\Delta t} - f'_t - K_t \{ v_t + (1/2 - \beta) \alpha_t \Delta t \} \Delta t \end{aligned} \dots\dots\dots (8)$$

(8) 式の未知数 $\alpha_{t+\Delta t}$ が一意に定まる条件は (9) 式で表される見かけの質量マトリックス M' が正値となることである。

$$M' = M + \beta \Delta t^2 K_t \dots\dots\dots (9)$$

ここで、もし M が負値となるならば運動エネルギー $1/2 v^T M v$ が負になってしまうから、 M は正値である。

そのため、たとえ部材の破断などにより K_t が正値でなくなったとしても M' を正値とする Δt は存在する。したがって $\alpha_{t+\Delta t}$ の存在も保証され、解析を続行することができる。

動的解析を用いると不連続な現象も解析できるということは、エネルギーの面から以下のような解釈が可能である。静的解析では外力による仕事はすべてひずみエネルギーに変換されなくてはならない。破断のような不連続な現象が発生した場合にはひずみエネルギーが構造物内部で再配分されなくてはならないが、通常これには大きな変形が必要でありこれを追跡することは困難である。動的解析による場合は外力による仕事はひずみエネルギーと運動エネルギーに変換される。不連続現象の発生によるエネルギーの再配分は、ひずみエネルギーだけではなく運動エネルギーに対しても行われるので、静的解析において生じる問題を回避できると考えられる。

このように、非線形性が強い構造物、不安定な構造物、あるいは不連続現象を起こす構造物に対して動的手法を用いることは有効であると考えられる。

3. 数値解析例

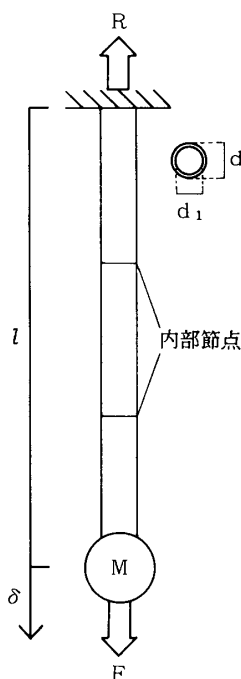


図-4 一軸引張問題

表-1 材料定数等

名 称	記号	数 値	単 位
座屈長さ	l	8.0	m
外径	d	0.1	m
内径	d_1	0.09	m
断面 2 次モーメント	A	1.49×10^{-3}	m^2
断面 2 次半径	I	1.69×10^{-6}	m^4
細長比	λ	3.36×10^{-2}	m
弾性剛性	E	2.06×10^{11}	Pa
粘性剛性	E'	5.15×10^9	Pa
降伏応力	σ_v	2.35×10^8	Pa
降伏ひずみ	ϵ_v	1.14×10^{-3}	
破断ひずみ	ϵ_c	1.14×10^{-1}	
質量	M	5.00×10^4	KG
オイラー座屈荷重	Pe	5.37×10^4	N
積分間隔	Δt	1.0×10^{-3}	s

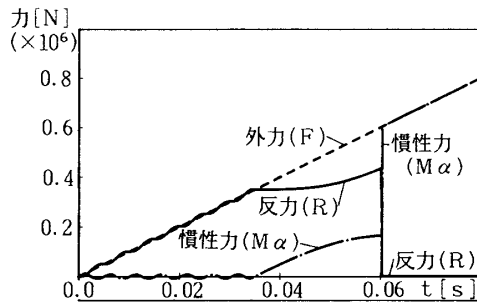


図-5 外力, 反力, 慣性力の時刻歴

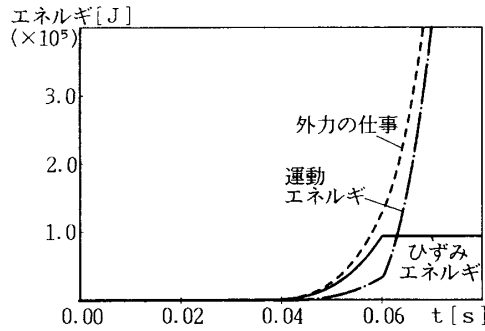


図-6 各種エネルギーの時刻歴

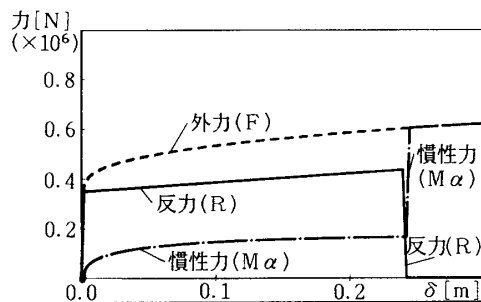


図-7 外力, 反力, 慣性力の加力点変位との関係

3.1 単純引張問題

この問題は図-4, 表-1のような直線部材を材軸方向に引張り, 破断させるという簡単なものである。しかし, これを静的に数値解析することは難しい。破断時に生じる大きな不釣り合い力が静的数値解析では通常解消できないからである。この解決方法の一つとして筆者らが文献1), 2) で用いた近似解を仮定する方法は大きな不釣り合い力の解消に多くの荷重階を必要とした。動的な手法によれば前項に述べた理由により破断現象が簡単に表現できることを確かめる。

形状および用いた断面の性能等は図-4および表-1に示すとおりである。部材は長さ方向に3分割し, 中間部分の部材の質量は無視し, 先端にのみ質点を設けた。また外力 F [N] は, (10) 式で表されるように時刻 t [s] に関して単調増加に作用させた。

$$F(t) = 10^7 t \dots\dots\dots(10)$$

図-5に外力 (F), 上端の節点に生じた反力 (R), および慣性力 ($M\alpha$) の時刻歴を示す。2.4で述べた(7)式に相当する(11)式が成立していることが確かめられ

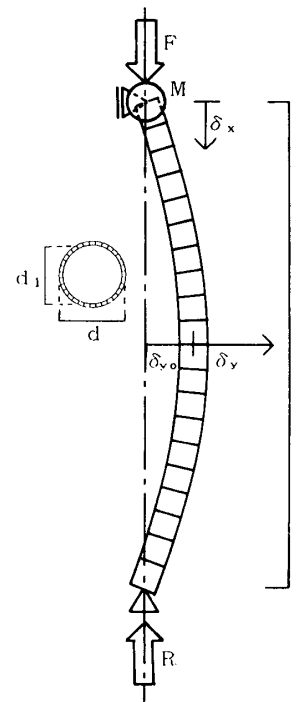


図-8 圧縮材の座屈問題

表-2 材料定数等

名	記号	数	値	単位
部材長	l	2.0		m
外径	d	0.1		m
内径	d_1	0.09		m
断面積	A	1.49×10^{-3}		m^2
弾性剛性	E	2.06×10^{11}		Pa
塑性剛性	E'	5.15×10^8		Pa
降伏応力度	σ_v	2.35×10^8		Pa
降伏ひずみ	ϵ_v	1.14×10^{-3}		
破断ひずみ	ϵ_c	1.14×10^{-1}		
質量	M	1.00×10^{-2}		Kg
固有周期	T	5.07×10^{-3}		s
積分間隔	Δt	1.0×10^{-4}		s

る。

$$F = R + M\alpha \dots\dots\dots(11)$$

また破断により反力が失われ, 運動が急加速されていることが表れている。 $t =$ 約0.035秒以前は部材が弾性状態にあり, 固有周期(約0.005秒)の振動が表れているが, それ以降は降伏により周期が20倍に延びるため, ここには表れない。 $t =$ 約0.06秒の破断後は質点が外力にのみ支配されて落下していることが表れている。

図-6に外力のした仕事および運動エネルギー, ひずみエネルギーの時刻歴を示す。部材破断によって塑性変形によるひずみエネルギーは保持され, 弾性変形によるひずみエネルギーは解放されるが塑性ひずみエネルギーに比べ小さいため図には表れていない。部材が破断した0.06秒以降はひずみエネルギーが変化しないため, 外力によりなされる仕事はすべて運動エネルギーに転化されていることが分かる。

図-7に载荷点の変位と外力 (F), 反力 (R), 慣性力 ($M\alpha$) との関係を示す。変位と反力 (R) との関係は, 材料の性質として設定したものがそのまま表れている。

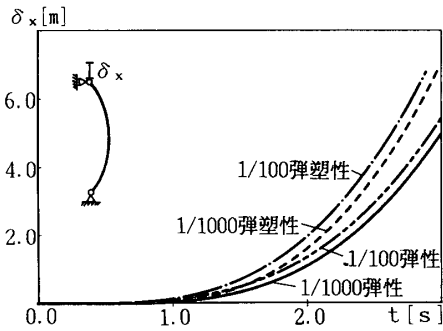


図-9 加力点変位の時刻歴

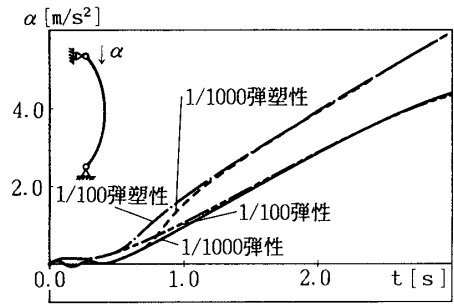


図-10 加力点加速度の時刻歴

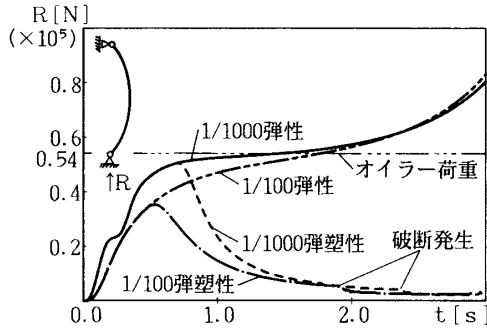


図-11 固定点反力の時刻歴

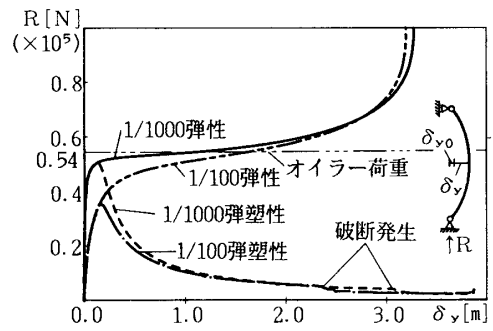


図-12 横方向変形量と固定点反力の関係

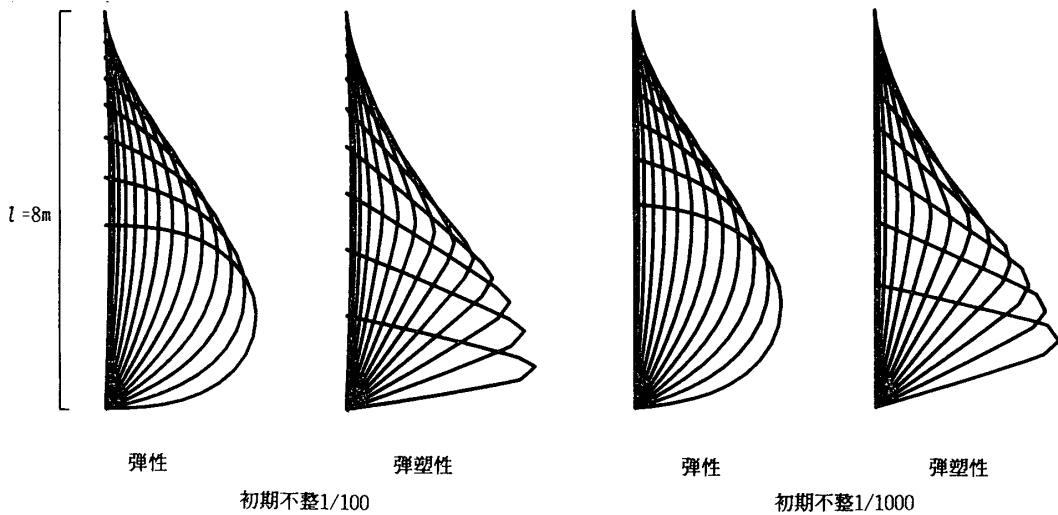


図-13 変形状態 (载荷開始から0.2秒きざみ)

静的数値解析で破断現象を含めたこの関係を得るためには、変位制御法を用いたとしても文献5), 6) で述べたような工夫が必要である。

3.2 圧縮材の座屈

これは図-8および表-2に示す細長比238の圧縮材の座屈問題である。部材中央点において全長の1/100あるいは1/1000となる正弦半波形の初期不整を与え、材料が常に弾性であるものと弾塑性性状を示すものの組み合わせとして合計4ケースの解析を行った。中間部分の構造重量は無視し、先端に $5 \times 10^4 \text{ kg}$ の質量を載せた。

外力 F [N] は、(12)式で表されるように時刻 t [s] に関して単調増加に作用させた。

$$F(t) = 10^5 t \dots\dots\dots(12)$$

図-9に加力点の変形量の時刻歴を示す。初期不整が

1/100のものは1/1000のものに比べ、初期の変形の進行が速いが、座屈が進行するに従い、常に弾性のもの・弾塑性のものともに、変形はそれぞれ同じ速さで進むことが分かる。

図-10に加力点の加速度の時刻歴を示す。1/1000の初期不整のものは、固有振動の影響が見られるが、初期不整1/100のものはその影響がほとんど見られない。座屈が進行すると、初期不整量に関係なく加速度の時間に関する変化は同じになることも分かる。

図-11に固定点の反力の時刻歴を示す。図-10でも述べたように、1/1000の初期不整のものは固有振動の影響が見られるが、初期不整1/100のものはその影響がほとんど見られない。初期不整1/100で弾塑性を考慮したものはオイラー座屈荷重よりもはるかに低い外力で座

屈し、また断面の一部が破断する ($t=1.9$ 秒) のも 1/1000 の初期不整のもの ($t=2.3$ 秒) に比べ早いことが分かる。

図—12 に横方向変形量と鉛直反力との関係を示す。初期不整の大きいものは断面の一部が破断する変形量が小さいことが分かる。図—12 の関係は筆者ら¹⁴⁾がすでに発表した静的解析法を用いても求めることができる。また弾性の場合にはいわゆるエラスチカ問題として理論解が求まっている。本手法で求めた解はこれらのいずれとも一致することを確かめてある。ただし、静的解析では断面の破断現象を扱うことは通常難しい。

図—13 に载荷開始から 0.2 秒きざみで 2.8 秒までの変形状態を示す。弾塑性を考慮した場合、部材中央部が降伏、断面の一部が破断することにより折れ曲がり、降伏していなかった部材の端部は外力が低下することにより初期の形状のほぼ直線形状に戻っていることが表れている。本例では 1 部材を 20 に等分割したため、部材中央部の折れ曲がり方が滑らかに表現できていないが、分割を非等分割にするかあるいは分割数を細かくすることにより、より滑らかにすることはできる。

4. 結 論

本論文では骨組構造の崩壊解析に動的手法を導入することを提案し、例として引張力を受ける場合と圧縮力を受ける場合の 1 本の部材についての解析を行った。これらの例は、崩壊後は不安定となるものであるにもかかわらず、特に困難な点なく解析でき、動的解析法を用いる利点が確かめられた。引続きその 2 では実規模骨組構造の崩壊過程を追跡する。

参考文献

- 1) 例えば W. E. Haisler, J. A. Stricklin : Displacement Incrementation in Non-linear Structural Analysis by the Self-correcting Method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, pp. 3-10, 1977
- 2) 例えば E. Ramm : Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points, Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, pp. 63-89, Springer-Verlag, 1981
- 3) 例えば Y. Hangai, S. Kawamata : Perturbation Method in the Analysis of Geometrically Nonlinear and Stability Problems, Advancement in Computational Mechanics in Structural Mechanics and Design, pp. 473-489, UAH Press, 1972
- 4) 例えば E. Riks, The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability, Journal of Applied Mechanics, Vol. 39, pp. 1060-1066, 1978
- 5) 和田 章, 久保田英之 : 不安定構造物の解析法に関する研究, 日本建築学会構造系論文報告集, No. 387, pp. 35-44, 1988. 5
- 6) 和田 章, 久保田英之 : 部材の座屈および破断を考慮したトラス構造の崩壊解析, 日本建築学会構造系論文報告集, No. 396, pp. 109-117, 1989. 2
- 7) J. S. Humphreys : On Dynamic Snap Buckling of Shallow Arches, AIAA Journal, Vol. 4, No. 5, 1966. 5
- 8) W. E. Gregory and R. H. Plaut : Dynamic Stability Boundaries for Shallow Arches, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of ASCE, Vol. 108, No. EM 6, 1982. 12
- 9) N. Matsuda, T. Nishiwaki and M. Minagawa : Non-linear Dynamic Analysis of Frame Structure, Computers & Structure, Vol. 27, No. 1, pp. 103-110, 1987
- 10) 増田陳紀, 西脇威夫, 皆川 勝, 山本英男 : 骨組構造の幾何学的非線形動的解析のための一方法, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, Vol. 10, pp. 431-436, 1987
- 11) H. Kunieda : Dynamics of Space Frame Structures Subject to Combined Lateral and Longitudinal Forces, 2nd International Conference on Space Structures, pp. 96-103, 1975
- 12) 國枝治郎 : 面外, 軸両方向に同時に周期的外力を受ける円筒殻の振動, 日本建築学会近畿支部研究報告書, pp. 137-140, 1975
- 13) S. Abrate and C. T. Sun : Dynamic Analysis of Geometrically Nonlinear Truss Structures, Computers & Structures, Vol. 17, No. 4, pp. 491-197, 1983
- 14) 和田 章, 久保田英之 : 実規模鋼構造骨組の 3 次元非線形解析へのスーパーコンピュータの応用, 日本建築学会構造系論文報告集, No. 394, pp. 94-103, 1988. 12
- 15) 鷺津久一郎ほか編 : 有限要素法ハンドブック II 応用編, 培風館, 1983. 1

SYNOPSIS

UDC : 624.072 : 69.059.22

DYNAMIC ANALYSIS METHOD FOR THE COLLAPSE PROBLEMS

—A material and geometrical nonlinear dynamic collapse analysis
for the space steel frameso Part 1—

by **HIDEYUKI KUBOTA**, Graduate Student of Tokyo Institute of Technology, and Dr. **AKIRA WADA**, Associate Professor, Tokyo Institute of Technology, Members of A. I. J.

There are many difficulties in the nonlinear statical analysis for the collapse of structures. Many solution procedures for these problems were proposed such as the displacement control method, the artificial spring method, the perturbation method, the method using the current stiffness parameter and the arc length method.

In the case of considering the rapture phenomenon of the materials, further hardships will obstruct to obtain a good solution because of the abrupt dropping of the strength. All structural problems which many researchers had treated as statically should have a dynamic effect tacitly such as the inertia force of the own weight of deforming structural element. At the critical or limit point, the inertia term will help to solve the equilibrium equations.

In this paper, a material and geometrical nonlinear dynamic analysis method is presented for the space steel frames, and the two numerical examples show the effectiveness of the proposed method.

- 1) Axial force act to the straight bar that will be yield and snapped.
- 2) Elastic and plastic buckling problem under the dynamic loading.