

崩壊問題の動的解析と静的解との比較

材料および幾何学的非線形を考慮した鋼構造骨組の動的崩壊解析 その2

DYNAMIC ANALYSIS FOR THE COLLAPSE PROBLEMS AND
THE COMPARISON OF ITS RESULTS WITH STATICA material and geometrical nonlinear dynamic collapse analysis
for the space steel frame Part 2

久保田英之*, 和田 章**, 林 賢一***

Hideyuki KUBOTA, Akira WADA and Kenichi HAYASHI

There are many difficulties in the nonlinear statical analysis for the collapse of structures. In the case of considering the discontinuity of the mechanical behavior of a materials, further hardships will obstruct to obtain a good solution because of the abrupt dropping of the strength. All structural problems which many researchers had treated as statically should have a dynamic effect tacitly such as the inertia force of the own weight of deforming structural element. At the critical or limit point, the inertia term will help to solve the equilibrium equations.

In this paper, a comparison between statical analysis method and dynamic is done, and three numerical examples show the effectiveness of the dynamic method.

1. yielding and breaking analysis of straight bar
2. snap through problem of reticulated space truss
3. material and geometrical nonlinear analysis of double-layered space frame

Keywords : dynamic analysis, collapse, nonlinear, space frame, buckling

1. 序 論

すべての力学現象は、たとえその変化が緩いとしても、広義の動的問題と考えることができる。力学現象を、釣合い状態の変化として静的に扱うことよりも、運動状態の変化としてとらえた方が実現象に忠実である。

我々はこの考えに基づき実現象に忠実な解析モデルを設定し、そのモデルを用いて数値解析により構造物の崩壊挙動を追跡することを目標としている。

その1¹⁾では材料および幾何学的非線形を考慮した動的構造解析法の提案と、不安定現象を生じる簡単な例題による解析法の確認について論じた。

その中ではまず、節点に存在する回転自由度を消去し並進自由度だけの運動方程式を導く手法、解析手法の基礎とした静的解析法からの改良点について述べた。

ついで、非線形問題、不安定問題の解の存在条件と動的解析法をそこに適用する是非について論じ、エネルギー的立場から動的解析法による解の解釈を行った。

例題として、直線部材の引張破断問題と圧縮座屈問題

を解析し、静的解析法の適用しにくい不安定問題であっても動的解析法を用いることにより解を得られることを明らかにした。

本論文では、直線部材の引張破断問題、網状スペーストラスの非線形解析、実験の行われている実規模構造の複層立体トラスの非線形解析について、載荷速度を変化させた考察等を行い、従来静的に解かれていた問題を動的に扱うことの意義と有効性について述べる。

2. 動的解析と静的解析

静的解析は動的解析の特殊なものであると考えられる。

ここでは単純化のため、減衰がない理想的な状態を仮定する。構造物の剛性 K は時刻 t の状態のまま $t + \Delta t$ まで変化しないとすると、時刻 $t + \Delta t$ における運動方程式は式(1)のように書ける。

$$M\alpha_{t+\Delta t} + K_t \Delta x + f_t = F_{t+\Delta t} \dots \dots \dots (1)$$

ここに M は質量マトリックス、 α は加速度、 Δx は増

* 日本電信電話株式会社

** 東京工業大学 教授・工博

*** 東京工業大学 大学院生

Nippon Telegraph and Telephone Corporation

Prof., Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.

Graduate Student of Tokyo Institute of Technology

分変位ベクトル, f は構造物が發揮している内力, F は外力ベクトルである。また添字 $t, t+\Delta t$ はそれぞれ時刻 $t, t+\Delta t$ における値である。

式 (1) で慣性力 Ma が恒等的に 0 であるとする立場が静的解析であり, 0 でなくても構わないとする立場が動的解析である。

慣性力 Ma が無視できるのは次の 2 つの場合である。

- 1) M が無視できる, すなわち大変軽い。しかも積 Ma が無視できる程度の a である。
- 2) a が無視できる, すなわち変形が大変緩やかである。しかも積 Ma が無視できる程度の M である。

M はある程度大きくなるのが通例であり, 仮定 1 は考えにくいので, 仮定 2 に帰着する。一般に静的解析が行われるのは 2 の仮定に基づいていると考えられる。

静的解析を行うためには, 式 (1) から慣性力の項を除いた式 (2) が常に成り立つことが必要である。

$$K_i \Delta x + f_t = F_{t+\Delta t} \dots \dots \dots (2)$$

外力変化が非常に緩やかであったとしてもその応答が緩やかであるとは限らない。たとえば系に材料非線形, あるいは幾何学的非線形を示す部分が存在し, 部材の座屈や破断に伴う急激な変化が生じると, 部分的に大きな加速度が発生し, 式 (2) の前提が必ずしも成り立たなくなる。

材料非線形を例にとると, 部材の破断現象は内力の急激な減少をもたらす。式 (2) が成り立つとするならば, 内力の急激な減少は, 外力がほとんど変わらないことを仮定すれば, $K_i \Delta x$ が急激に増加することを意味する。部材の破断によって剛性が増加することはないから, 結局 Δx が急激に増加する, すなわち変形が急激に進行することになる。そのため, 式 (2) を満たすような Δx を静的に求めることは通常大変難しいことになる。

ところが式 (1) の下では, 部材の破断現象が発生したときは, f の減少分は $Ma_{t+\Delta t} + K_i \Delta x$ で吸収される。加速度は変位, 時間と独立ではないから, 式 (1) を満たすように $\Delta x, a_{t+\Delta t}$ を定めることは可能である。

シェルなど幾何学的非線形性が強い場合は, 静的な釣合い経路が非常に複雑になることがある。このような時間の経過を無視した釣合い経路を求めることは力学および数学的研究としての意味は大きい, 実現象の解析を目的とする場合には, その結果の意味付けは難しいと考える。釣合い経路を求めただけでは, 外力に対する構造物の応答を求めたことにならないからである。

3. 解析方法

3.1 概要

解析手法の基本的な考え方はその 1⁾⁾ で述べた。ここでは要点だけをまとめる。

- 1) 動的数値解析には運動方程式を短い時間間隔で逐次

積分してゆく直接積分法の一つである Newmark- β 法 ($\beta = 1/4$: 定加速度法) を用いる。

- 2) 解析で用いる自由度は 1 節点について, 並進 3 成分, 各軸回りの回転 3 成分である。本論文では部材として鋼管を用いているのでこの 6 成分の自由度によって解析している, H 型鋼のような開断面部材の解析のために断面のそりを考慮した解析も行えるように理論展開している。
- 3) 回転自由度の項には慣性力および外力は作用せず骨組の各節点における並進運動の項だけに慣性が作用するとする。
- 4) 構造物の剛性は時刻 t の状態のままで $t+\Delta t$ まで変化しないとする。

3.2 収束計算

本研究では各積分ステップで外力と (ひずみによる内部節点力+慣性力) との釣合いをチェックし, 釣合いの精度が悪ければ収束計算を行うことにより精度を確保している。しかし, 以下の例題では Δt を十分に小さく取っているため収束計算の必要はなかった。

4. 数値解析例 1—単純引張問題

この問題は, その 1⁾⁾ でも取り上げた, 図—1 のような直線部材を材軸方向に引張り, 破断させるという簡単なものである。本解析例は, 破断を伴う急激な状態の変化により $a \approx 0$ という静的解析が可能であるための前提が崩れるため, 動的解析によらなくては厳密な解は得られない。

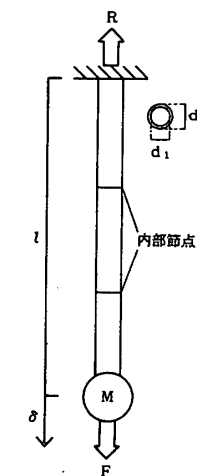
ここでは, 3 種類の载荷速度に対して解析を行い, その結果を比較検討する。

4.1 解析モデル

表—1 に諸元を示す。なお部材の途中には質量を置かない。

表—1 材料定数等

名称	記号	数値	単位
部材長	l	2.0	m
外径	d	0.1	m
内径	d_1	0.09	m
断面積	A	1.49×10^{-3}	m ²
弾性剛性	E	2.06×10^{11}	Pa
塑性剛性	E'	5.15×10^8	Pa
降伏応力度	σ_y	2.35×10^8	Pa
降伏ひずみ	ϵ_y	1.14×10^{-3}	
破断ひずみ	ϵ_c	1.14×10^{-1}	
質量	M	1.00×10^2	Kg
弾性固有周期	T	5.07×10^{-3}	s
降伏後固有周期	T'	5.07×10^{-3}	s
積分間隔	Δt	1.0×10^{-4}	s



図—1 単純引張問題

外力 F [N] は時間 t [sec] の関数として式 (3) に従って作用させる。

$$F(t) = \xi t \dots\dots\dots (3)$$

ξ は载荷速度を表すパラメータである。文献1) と同じ $\xi = 10^7$ [N/sec] (以下 case F と呼ぶ) のほかに、速度の小さな 10^6 [N/sec] (以下 case M と呼ぶ), 10^5 [N/sec] (以下 case S と呼ぶ) の全3ケースの解析を行い、結果を比較する。

4.2 解析結果

今回の解析では材料の力学的性質に速度の影響を無視し、中間の質量を考慮していないため、反力 R と変形 δ との関係は図-2 に示すように ξ によらず同じである。

反力 R と時刻を ξ で基準化したものとの関係は図-3 のようになる。また加速度 α と時刻を ξ で基準化したものとの関係は図-4 のようになる。系に減衰を考慮していないため、図-3、図-4 どちらの関係にも固有振動の影響が見られる。

固有周期は降伏前 5.07×10^{-3} [sec], 降伏後 1.02×10^{-1} [sec] である。固有周期は ξ によらず一定である

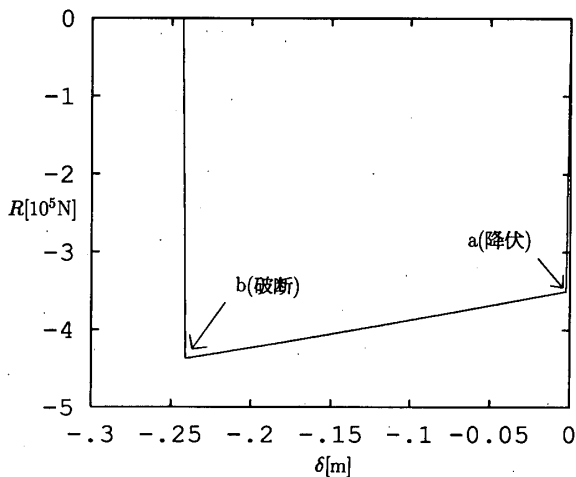


図-2 変位-反力関係

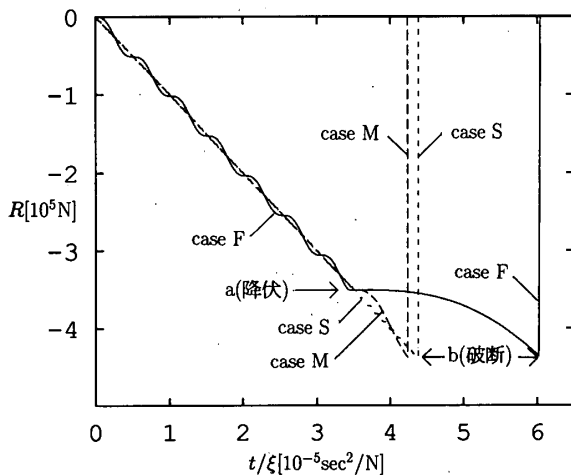


図-3 反力時刻歴

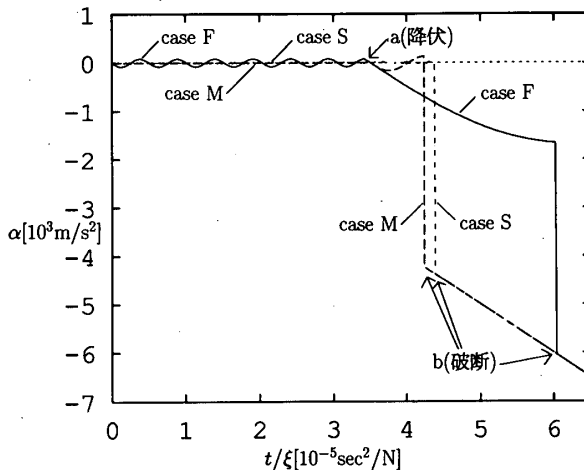


図-4 载荷点加速度時刻歴

ので、 ξ が小さく現象に時間を長く要するものほど、固有振動数の影響が相対的に目立たなくなる。具体的には case F では降伏まで約7回、case M では約70回、case S では約700回の振動が起こっている。

この振幅は1/4固有周期の間の変位量で決定されるので、载荷速度の小さいものほど振幅も小さくなっている。加速度の変動も同様の理由で载荷速度の小さいものほど小さくなっている。この関係は降伏後も変わらない。これらのことが、 ξ が小さいものほど時刻歴が直線的になる理由であり、外力の変化について考えると、問題を静的に扱っていることに近くなる。

図中 a 点で降伏した後は降伏による剛性低下のために固有周期が約20倍に伸びる。case F では固有周期の1/4程度の時間で破断ひずみ b 点に達し破断するが、case S では破断まで固有周期の90倍程度の時間を要する。

b 点で破断した後は $M\alpha = F(t)$ の直線に乗ることが分かる。

この解析例で分かるように、部材の状態の変化によって系に大きな加速度が急激に発生することがある。慣性力を無視した静的解析法ではこのような現象を扱うことは難しい。

5. 数値解析例2—網状スペーストラス

図-5 に示す解析例題は多くの研究者 (たとえば半谷ら³⁾, Tachibana⁴⁾, Williams⁵⁾, Zienkiewicz ら⁶⁾, D. Karamanlidis ら⁷⁾, K. Kondoh ら⁸⁾など) が解析を行ってきた有名な網状スペーストラスの snap through 問題である。かつて筆者らも文献9) で静的解析を行った。

この例は釣合い経路上に特異点を持つ構造物で、通常の手法では解析することは難しい。

5.1 解析モデル

部材はすべて同一の材料・断面とする。ここでは鋼材を想定しヤング係数 $E = 2.06 \times 10^{11}$ [Pa], 断面積 $A =$

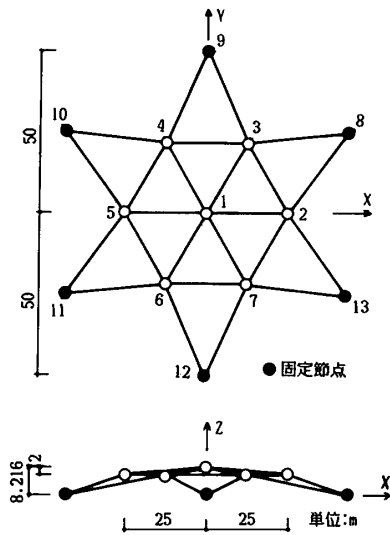


図-5 網状スペーストラス問題

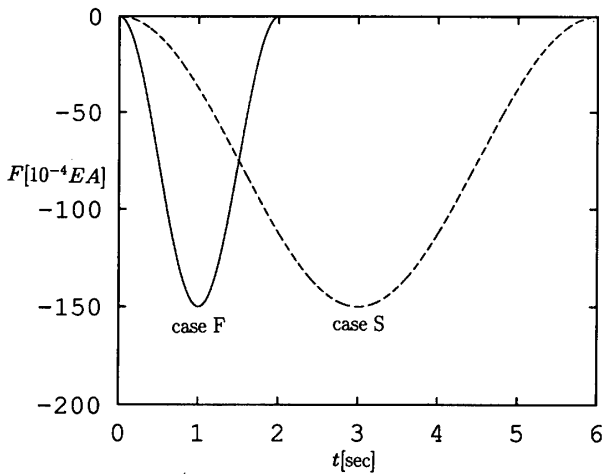


図-6 外力時刻歴

4.77×10^{-2} [m²] とする。部材は常に弾性を保ち個材座屈は生じないものとし、また部材接合部はすべてピン接合とする。

載荷点である中央の節点に 2.82×10^4 [kg]、それ以外の節点に 2.59×10^2 [kg] の質量を付加して質点とする。

この状態で総自由度数 21、固有周期は 1 次が 0.354 [sec]、2 次が 0.0513 [sec]、21 次が 0.00256 [sec] である。

減衰マトリックスは、初期剛性から求めた 1 次固有円振動数 ω_1 とそれに対する減衰定数 h_1 より $2h_1/\omega_1$ を求め、現時点の剛性マトリックスに乗じる瞬間剛性比例型とし、並進自由度の項に作用するものとする。

節点 1 の z 方向に外力 F を作用させる。外力は図-6 に示すように最大値は $150 [10^{-4} EA]$ とし、外力を 0 に戻すまでの秒数の違いで 2 ケースの解析する。すなわち、2 [sec] 後に 0 に戻る場合 (case F) と、case F の 3 倍の時間をかける case S の 2 ケースである。

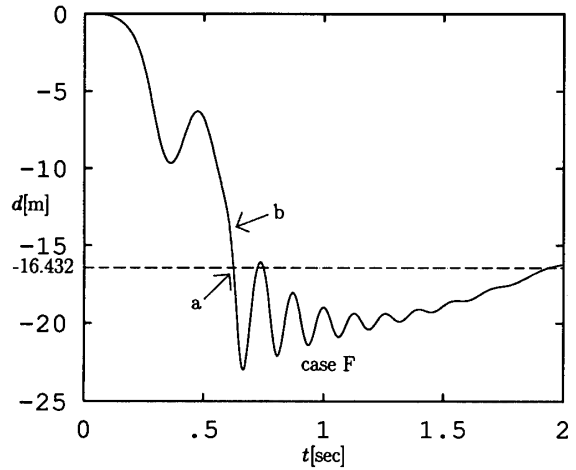


図-7 変位時刻歴 [case F]

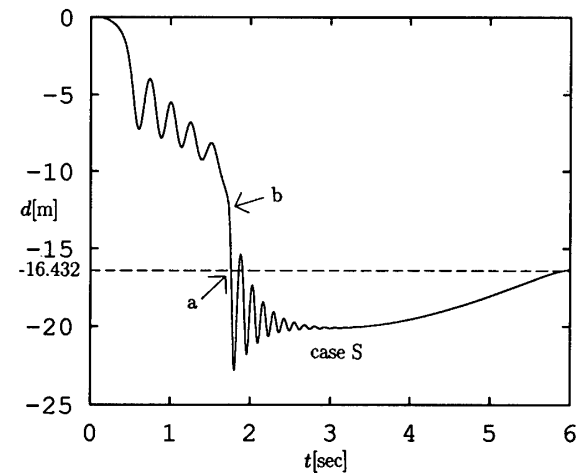


図-8 変位時刻歴 [case S]

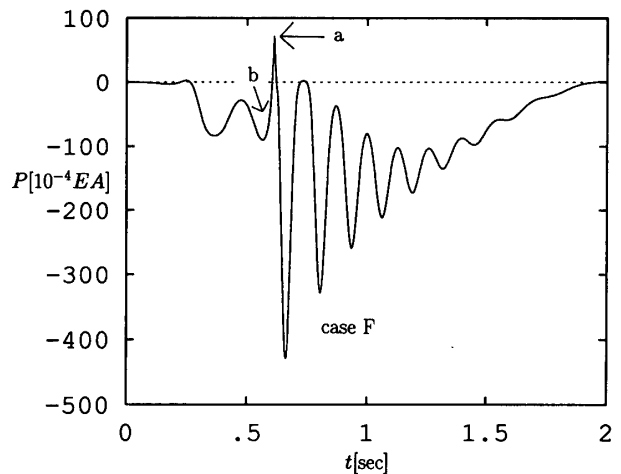


図-9 中央点内力時刻歴 [case F]

積分間隔は 0.001 [sec]、減衰定数 h_1 は 3% とする。

5.2 解析結果

図-7, 8 は中央の節点 1 の z 方向変位の時刻歴である。a 点において構造物は反転位置に達している。質量は節点 1 に大きく偏っているため、この節点の挙動が全体に支配的である。この例は減衰があり、最終的に荷重が 0 になるため、反転位置で振動が収まっている。

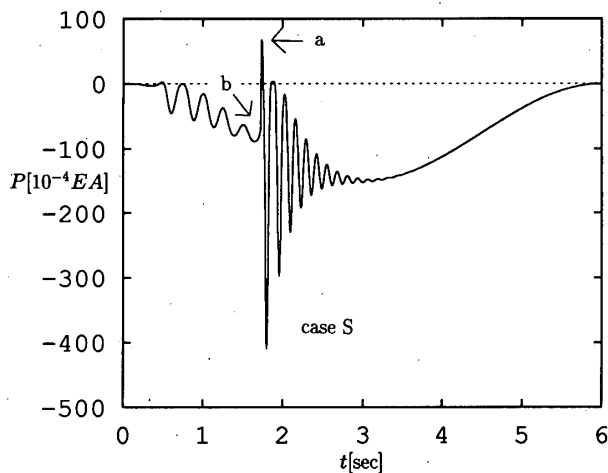


図-10 中央点反力時刻歴 [case S]

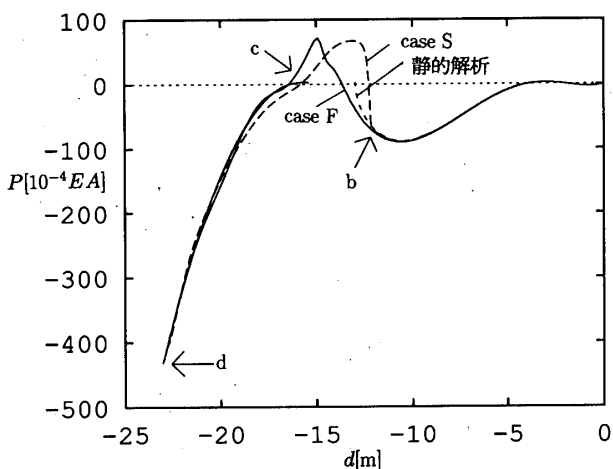


図-11 中央点変位-内力関係

加力点の z 方向内力の時刻歴を表したものが図-9, 10である。構造物が反転位置に達した後、内力の変動が激しくなり、急激な運動が生じていることが分かる。

図-11は節点1の z 方向の内力と変位の関係である。b点までは静的解析結果とほぼ一致している。b点を過ぎると自ら変位を進めようとする力が発生し、snap through現象が起こっているのが分かる。この snap through現象は荷重の遅い case Sの方が荷重の速い case Fに比べ相対的に急激であることが分かる。その後 c-d 点間で振動しながら減衰し反転位置 f 点に落着くが、この c-d 点間に描かれる曲線は、この構造物の初期状態に対して z 方向上向きに外力を作用させた場合の原点から描かれる曲線と同一である。

なお、ここで示した反転位置とは、節点1の z 方向変位が -16.432 [m] の時を指している。また図-11における静的解析結果は文献9)において得られたものである。

このように、実現現象に忠実に、系が運動を起こすことを考慮すれば、釣合い経路上の特異点を越えての解析が可能である。

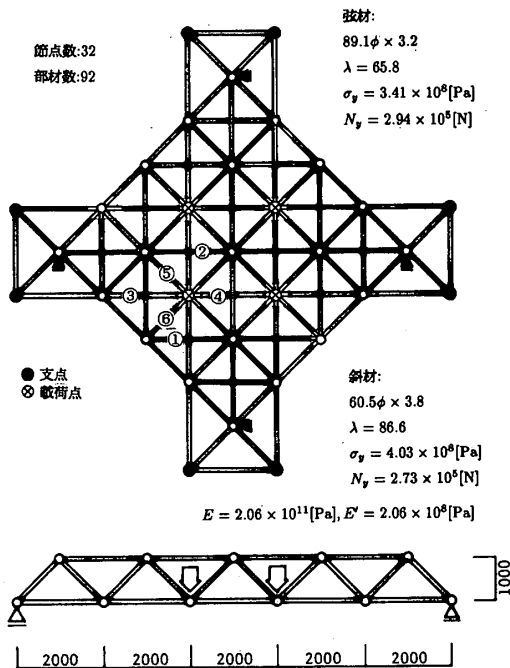


図-12 複層立体トラス構造物の解析例

6. 数値解析例 3—複層立体トラス

その1¹⁾と本論文の4, 5では簡単な例題を用いて、従来静的に扱われてきた問題を動的に扱う意義について述べてきた。ここで示した方法を実際に設計され建設される規模の構造物に対しても応用することができれば、設計の時点で構造物の力学的性質を最終崩壊まで把握でき、非常に有意義である。ここでは1984年に実験が行われた立体トラス構造物¹⁰⁾を例題としてこの解析法を適用してみる。この実験は文献2)でも比較対象として扱っている。

解析に要した時間はCRAY-2を使って1 caseにつきCPUで3時間程度であり、現時点では実用的とは言えない。しかし計算機の進歩には目覚ましいものがあり、近い将来には実用的な計算時間で処理できるようになると考える。

6.1 解析モデル

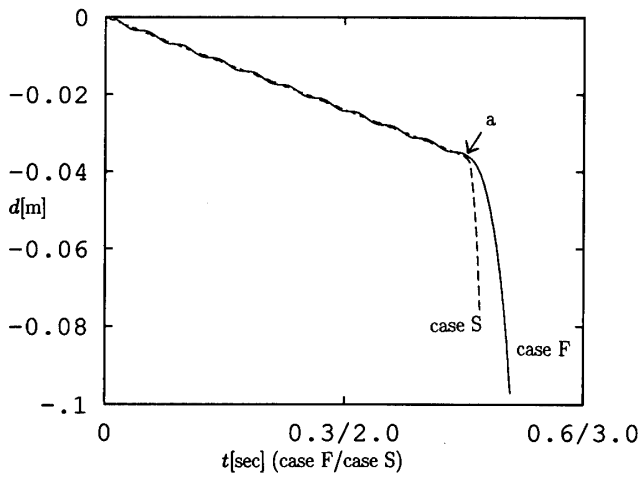
この解析例は図-12に形状を示す複層立体トラス構造物である。

各節点の質量は、その節点に取りついている部材の質量のみからなるとする。すなわち、各部材の質量をその部材の両端の節点が均等に負担するものとして定める。

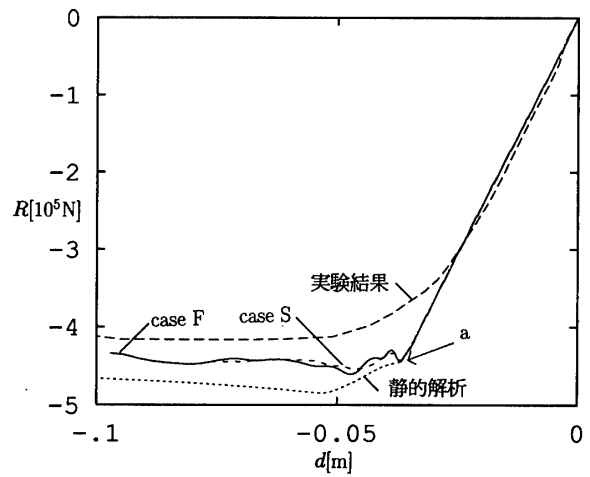
解析の境界条件は、図-12中●で示す点を鉛直方向に支持し、▲で示す点を水平方向に支持する。

各部材の端部は節点に剛接合してあるものとする。荷重は中央部下弦材の4交点⊗に均等に作用させる。

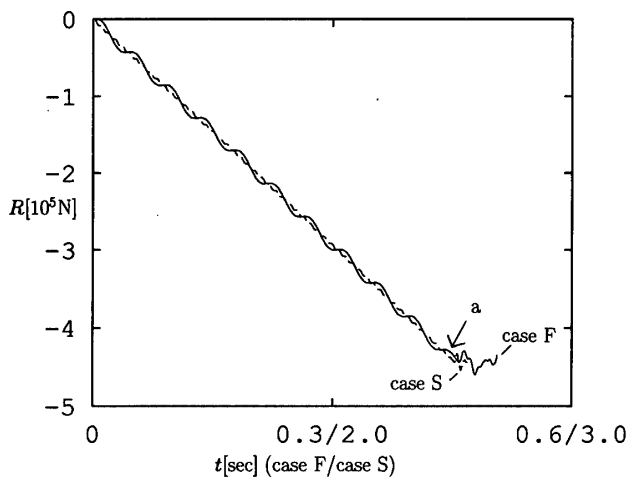
解析は荷重速度の違いにより2通り行う。静的解析での最大耐力(約50 ton $\approx 4.9 \times 10^5$ [N])の約2倍が1秒後に作用するようにする case F, 5秒後に作用するようにする case Sである。いずれの場合も荷重が一定の



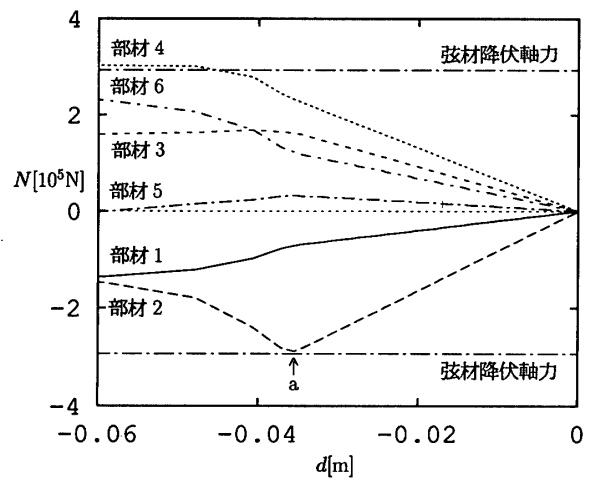
図一13 中央点変位-時刻歴



図一15 反力-変形関係



図一14 反力時刻歴



図一16 変位-軸力関係 [case F]

割合で増加するように作用させる。

この構造物は 87 自由度あり、固有周期は 1 次が 0.0436 秒、2 次、3 次が共に 0.0372 秒、87 次が 0.00168 秒である。

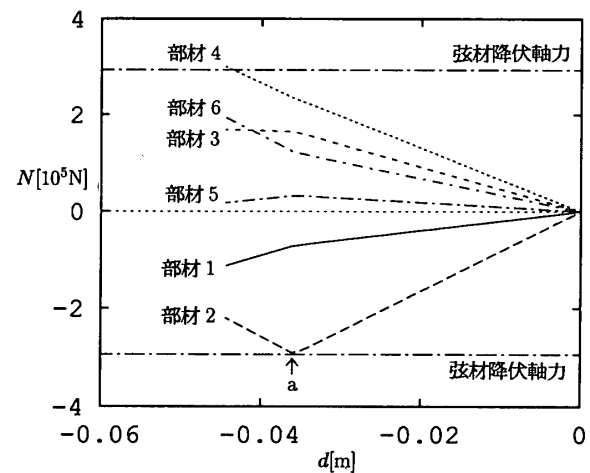
数値解析の時間積分の間隔は 0.001 秒とする。

6.2 解析結果

図一13 に中央点の鉛直変位の時刻歴を示す。また図一14 に支持点 (図一12 の●) の鉛直方向反力の時刻歴を示す。図一15 には反力と鉛直変位との関係を示す。図中に示した「実験結果」は上述の実験結果¹⁰⁾である。

解析結果と比べ、実験結果の方が反力が小さいのは、実験では部材端部が細くなっており、ボルトにより接合しているのに対し、解析では一様な太さで節点で剛に接続しているものと仮定したためであると考えられる。図一13 の曲線の折れ曲がり a 点は、中央上弦材が塑性座屈することにより生じている。ゆっくり载荷した case S の方が例題 2 の場合と同様に座屈後急激に変形が進行し、この間の支持力はほとんど増加していないことが分かる。

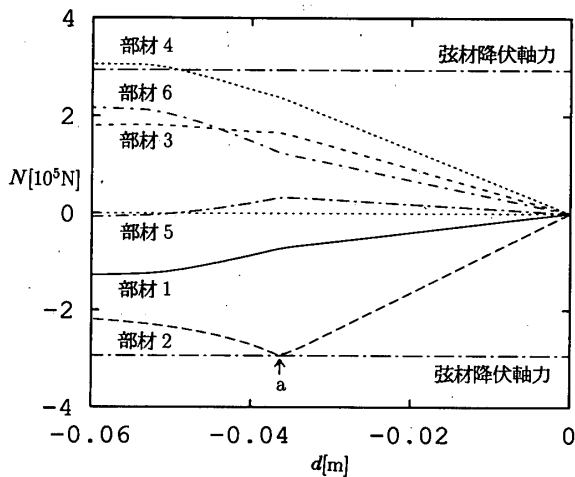
a 点で上弦材が塑性座屈したあと、静的解析と動的解析とは反力-変形関係が異なっている。図一13 によれば、



図一17 変位-軸力関係 [case S]

座屈後急激に変形が進行している。この時の加速度による慣性力の影響で全体の変形が変化したものと考えられる。

図一16 から 18 に中央部の変形と代表的部材の軸力との関係を示す。座屈発生まではどの解析法でも同じ結果であるが、座屈発生により急激な運動が始まると、質点に作用する慣性力の影響で、変形が運動状態によって異



図一18 変位-軸力関係 [静的]

なるため、微妙な違いが見られる。

7. 考察

例2, 例3のように静的解すなわち釣合い経路が得られているものと動的解を比較すると、載荷開始当初は同じ変位-荷重曲線を描く。幾何剛性の変化あるいは塑性化による剛性の低下によって変形が急激に進行するようになると、静的解析解と、動的解析解とで違う変位-反力関係になる。また、動的解析であっても、載荷の仕方によってもかなり異なる変位-反力関係になることも分かる。その他にも質量の分布形によっても挙動が異なる¹¹⁾。これらはすべて動的解析の場合に質点に作用する慣性力の影響であると考ええる。

8. 結論

構造物に外力が作用した時の挙動を、材料の構成則、釣合い条件、適合条件の3つの基本式を用いて、静的な釣合い条件の変化と考えると解析する方法が静的解析である。つまり構造物に生じる加速度、速度は無視できると考えている。

静的解析は構造物が安定範囲にあるときには、外力に対して生じる変形、応力状態が1対1に対応し、その結果得られる変形、ひずみ、応力は構造物の力学的挙動を理解するのに非常に有益である。

構造物が不安定状態に入った後の挙動の解析についても、静的に与えた外力と構造物の抵抗の釣合いという考え方で解を得る研究は数多くなされている。しかし、本論文で述べたように、部材の座屈、破断などによって構造物の中に急激な変化が生じたとき、あくまで外力と構造物の抵抗の釣合いを保つという考え方で解を得ることは非常に難しくなる。

実際現象としても構造物には質量が存在し、急激な構造物の変化には大きな加速度、速度が生じるから、このような不安定問題は動的に扱う方が合理的であると考

えられる。

その1に引き続き本論文では3つの例題を用い、特に外力の作用時間を変数として数値解析を行い考察することによって、不安定問題の構造解析を動的に扱うことの有効性を示した。

動的解析はこのように利点が多いが、膨大な計算を必要とするという欠点がある。解析例から分かるように、構造物の最も長い固有周期の数倍の時間にわたって解析しなければ、構造物の固有振動の影響を強く受ける。

一方で、数値積分の制約から、構造物の最も短い固有周期より短い積分刻みで積分を行わなければ発散現象を起こしてしまう。したがって、数千、数万の時間ステップにわたり非線形解析を行わなければならない。

次には、部材の中間にも質量を分布させて部材内の動きにも慣性力を考慮しながら構造物の非線形挙動を追跡することを考えているが、この場合、最短固有周期は本論文で扱ったものよりさらに短くなる難しさがある。

自然現象は連続的な現象であり、数値解析に用いている時間刻み Δt は必要なく、載荷時間はいくらでも遅くすることができる。わかりやすく言い換えると自然界は無限回の積分を行っていることになる。

以上述べてきたように、現状の計算機によって自然に起きている現象をそのまま再現しようとするのは非常に難しいが、計算機の能力の向上には目覚ましいものがあり、近い将来このような解析を行うことも可能になると考えている。

参考文献

- 1) 久保田英之, 和田 章: 崩壊問題の動的解析法—材料および幾何学的非線形を考慮した鋼構造骨組の動的崩壊解析 その1, 日本建築学会構造系論文報告集, No. 403, pp. 97-103, 1989. 9
- 2) 和田 章, 久保田英之: 実規模鋼構造骨組の3次元非線形解析へのスーパーコンピュータの応用, 日本建築学会構造系論文報告集, No. 394, pp. 94-103, 1988. 12
- 3) 半谷裕彦, 川股重也: 立体トラスの非線形解析, 日本鋼構造協会第5回大会研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集, pp. 237-244, 1971
- 4) E. Tachibana: On Application of the Quasi-Newton Method for Structural Analysis Including the Dynamic Snap-through Problem, Proceedings of the IASS Symposium on Membrane Structures and Space Frames, Vol. 3, pp. 129-136, 1986
- 5) F. W. Williams: An Approach to the Nonlinear Behaviour of Members of a Rigid Jointed Plane Framework with Finite Deflections, Q. J. of Mech. and App. Math., Vol. 14, No. 4, pp. 451-469, 1964
- 6) O. C. Zienkiewicz et al.: Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells, Comp. and Struct., Vol. 7, pp. 725-735, 1977

- 7) D. Karamanlidis et al. : Large Deflection Finite Element Analysis of Pre- and Post-critical Response of Thin Elastic Frames, Nonlinear FE Analy. in Struct. Mech. , Springer-Verlag, New York, pp.217-235, 1981
- 8) K. Kondoh et al. : An explicit Expression for the Tangent-Stiffness of a Finiteley deformed 3-D Beam and Its Use in the Analysis of Space Frames, Comp. and Struct. , Vol. 24, No. 2, pp.253-271, 1986
- 9) 和田 章, 久保田英之 : 部材の座屈および破断を考慮したトラス構造の崩壊解析, 日本建築学会構造系論文報告集, No. 396, pp.109-117, 1989. 2
- 10) 白谷邦雄, 石井国夫, 菊地文孝, 上遠野明夫, 村松輝久, 犬木弘志 : 鋼管構造立体トラスに関する研究—その2 NS トラス平板骨組実験, 製鉄研究, No. 313, p. 84-92, 1984
- 11) 林 賢一, 和田 章, 久保田英之 : 幾何学的非線形を考慮した骨組の動的解析—その2 Reticulated space truss 一, 日本建築学会大会学術講演梗概集, Vol. B, pp.1089-1090, 1990. 10

(1990年7月10日原稿受理, 1990年12月5日採用決定)