

水平変形に注目した立体鉄骨骨組の部材断面変更法

THREE-DIMENSIONAL STEEL STRUCTURE FRAME IMPROVEMENT METHOD FOCUSING ON LATERAL DRIFT

内村 均*, 和田 章**
Hitoshi UCHIMURA and Akira WADA

Three-dimensional steel structure frame improvement method focusing on inter-story deflection constraints, torsional deformation constraints is presented. Load cases acting in two directions are considered for the frame improvement method. Displacement participation factor of element member correspond to any node displacement is obtained from unit load method. Utilizing displacement participation factor with mathematical optimum technique is possible to apply for re-sizing element members of steel frame. A setback frame example is demonstrated satisfying the deflection design constraints with minimizing total weight of steel volume.

Keywords : structural design, steel structure, optimization, elastic design, three-dimensional frame

構造設計, 鉄骨構造, 最適化, 弾性解析, 立体骨組

1. はじめに

鉄骨造建築物の構造計画を進める場合、建物に適切な剛性を確保するために設けられた変形の制限値が、厳しい制約条件になることがある。しかし、構造骨組の変形量は、応力値とは違い、各部材要素単位で陽な形で表現されていないため、断面変更を行う場合、試行錯誤の繰返しが必要となるのが現状である。筆者らは、前著¹⁾において、単位荷重法によって得られた、各部材断面の変位寄与量を用いて、弾性平面骨組解析の中で、許容応力度と、建物の層間変形角の制約を同時に満足しながら、最小重量設計を目的とした部材断面変更法を示した。本論は、前著の手法を発展させ、偏心荷重やセットバックを有する弾性立体骨組に対して、部材断面変更法を論じるものである。立体弾性骨組を3次元空間座標の中に置き、地震荷重を静的荷重に置き換えて解析を行う場合、荷重ケースは少なくとも、空間座標系のXおよびY方向の2ケース、またはそれ以上の検討を行う必要がある。本論では、これら荷重ケースによる骨組の変形の制約を同時に考慮した手法を示す。なお、許容応力度の制約を同時に満足しながら、部材断面の変更を行うアルゴリズムについては、ここでは論じないこととする。

既往の研究で、変位寄与量を用いて弾性立体骨組に対して、最小重量設計を目的として部材断面変更法を論じているものに、C. M.

Chan²⁾の研究がある。また、逆問題設計法として、部材の材端ひずみ制御から弾性立体骨組の変形制約を論じたものに、中村・小坂の研究³⁾がある。さらに、中村・小坂の理論をベースにニューラルネットワークを利用して学習させることにより、偏心荷重やセットバックの無い弾性立体骨組に対し、層間変形や応力の制約下の、最小重量設計について論じたものに、堤の研究⁴⁾がある。

2. 単位荷重法を用いた変位量の定式化

2. 1 基礎理論

立体骨組のある荷重条件下のある節点の変位量 δ_{lk} は、単位荷重法を用いれば、(1)、(2)式より求められる。

$$\delta_{lk} = \sum_{i=1}^m d_{lki} \quad (l=1,2 \quad k=1,2,\dots,n) \quad \text{----- (1)}$$

$$d_{lki} = \int_0^{L_i} \left(\frac{f_{x_{lki}} F_{x_{li}}}{E_i A_i} + \frac{f_{y_{lki}} F_{y_{li}}}{G_i A_{y_i}} + \frac{f_{z_{lki}} F_{z_{li}}}{G_i A_{z_i}} + \frac{m_{x_{lki}} M_{x_{li}}}{G_i J_i} + \frac{m_{y_{lki}} M_{y_{li}}}{E_i I_{y_i}} + \frac{m_{z_{lki}} M_{z_{li}}}{E_i I_{z_i}} \right) dx$$

$$= dn_{lki} + dqy_{lki} + dqz_{lki} + dmj_{lki} + dmy_{lki} + dmz_{lki}$$

$$(l=1,2 \quad k=1,2,\dots,n \quad i=1,2,\dots,m) \quad \text{----- (2)}$$

ここに、添え字の l は荷重ケースに(荷重ケースとしてX、Yの2方

* 佐藤工業(株)中央技術研究所 工修

** 東京工業大学建築物理研究センター 教授・工博

Engineering Research Center, Sato Kogyo Co., Ltd., M. Eng.
Prof., Structural Engineering Research Center, Tokyo Institute of Technology,
Dr. Eng.

向を考慮)、 k は節点の番号に、 i は部材要素番号に対応する。また、 $\int dx$ は部材要素の長さ方向の積分を意味する。(2)式の f_x, f_y, f_z は、変形を求めようとする方向の単位荷重によって部材に発生した軸力、フランジ方向せん断力、ウェブ方向せん断力を示す。 m_x, m_y, m_z は、単位荷重によって部材に発生したねじりモーメント、強軸まわり曲げモーメント、弱軸まわり曲げモーメントを示す。 $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$ は、設計荷重によって発生した応力で、応力の種類は、同じ呼び名の単位荷重によって発生した応力と同じである。また、 E, G はそれぞれ、ヤング係数と、せん断弾性係数を示し、 A, A_y, A_z は、それぞれ軸方向断面積、フランジの断面積、ウェブの断面積を、 J, I_y, I_z は、それぞれ、St.Venant のねじり定数、強軸まわり断面 2 次モーメント、弱軸まわり断面 2 次モーメントを示す。文献 5)によれば、 d_{lki} を変位寄与量(displacement participation factor)と呼んでいる。 dn, dqy, dqz は、それぞれ軸力、フランジ方向せん断力、ウェブ方向せん断力に関する変位寄与量を示し、 dmx, dmy, dmz は、それぞれねじり曲げ、強軸曲げ、弱軸曲げに関する変位寄与量を示す。このように、ある節点に対する部材の変形量が、陽な形で表現できれば、部材のその節点の変形量に対する影響度または重要度が把握できる。

2. 2 解析例

図 1 に解析例題を示す。部材断面は、表 1 に示すように柱は組立箱形鋼、梁は組立 H 形鋼とし、図 1 には、応力の識別に使用する部材座標系を示した。各部材の板厚の初期値は、一つの例として、現行の設計法で用いられている最小幅厚比を満たすと同時に、長期許容応力値も満足する最小厚とした。柱脚はピン支持とし、水平変形が厳しい制約となるように設定した。その他の設計条件を以下に示す。

- ・長期応力は、床面の荷重を $0.8t/m^2$ として算出する。
- ・地震力は、床面の荷重を $0.8t/m^2$ として、建築基準法施行令で定められた A_i 分布より求める。各階に与える層せん断力を表 2 に示す。なお各階に与える水平力は、層せん断力が、その階が支える重量全体の重心位置に作用するように与える。
- ・剛床仮定を用いる。
- ・梁は、合成梁として扱い、スラブの協力幅による曲げ剛性増大率は、一律に 1.6 と定める。

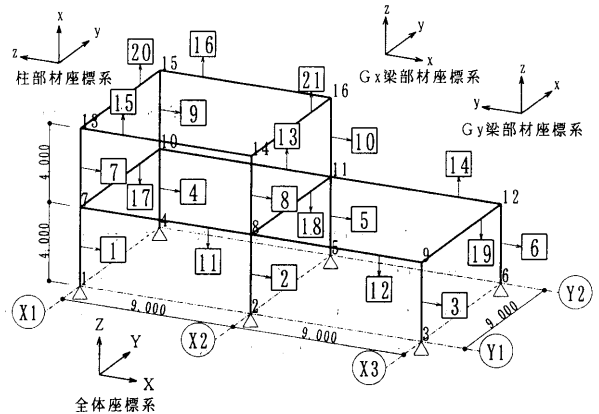
表 3 に、各部材の建物頂部の重心位置の水平変位に対する変位寄与量を各階の柱・梁別および部材の応力別に分類したものを示す。かつこの値は、建物頂部の変位量を 100% としたときの百分率を示している。この表より、XY 方向共に、2 階の床の梁で、地震力の方向に平行な梁が、最も頂部の変位に対する、影響が大きいことを示している。また、応力別には、XY 方向共に各地震力方向に抵抗する軸まわりの曲げモーメントが寄与量の 9 割以上を占めている(梁は、地震の方向に関係なく y 軸回りが抵抗し、柱は X 方向地震に対しては y 軸回りが、Y 方向地震に対しては、 z 軸回りが抵抗する)。ところで、セットバックによりねじり変形が生じる Y 方向地震力に対しては、ねじり曲げと弱軸曲げの変位寄与量が多少生じているが、その総和は 2% 未満で、建物頂部の水平変形量には支配的ではなく、部材の曲げ変形が支配的であることが分かる。

表 1 部材断面表 (SM490 材) 単位 mm

| リスト記号 | 要素番号 | 断面リスト |
|-------|-------|----------------|
| C1 | 1~6 | □-400×400×16 |
| C2 | 7~10 | □-400×400×16 |
| Gx1 | 11~14 | H-450×200×9×12 |
| Gx2 | 15~16 | H-450×200×9×12 |
| Gy1 | 17~19 | H-450×200×9×12 |
| Gy2 | 20~21 | H-450×200×9×12 |

表 2 地震層せん断力分布 (単位 t)

| 地震力作用位置 | 地震力 |
|---------|------|
| R F 床 | 18.0 |
| 2 F 床 | 38.9 |



注) □付き番号が要素番号で、□無し番号が節点番号

図 1 解析例題

表 3 建物頂部の変位に対する変位寄与量

X 方向地震

| group | dn | dqy | dqz | dmx | dmy | dmz | dtotal |
|--------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|
| C1 | 0.005 (0.1) | - | 0.031 (0.8) | - | 1.114 (28.1) | - | 1.150 (29.0) |
| C2 | 0.001 (0.0) | - | 0.022 (0.6) | - | 0.261 (6.6) | - | 0.284 (7.2) |
| column | 0.007 (0.2) | 0.000 (0.0) | 0.053 (1.3) | 0.000 (0.0) | 1.375 (34.7) | 0.000 (0.0) | 1.435 (36.2) |

| group | dn | dqy | dqz | dmx | dmy | dmz | dtotal |
|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|
| Gx1 | - | - | 0.100 (2.5) | - | 1.924 (48.5) | - | 2.024 (51.0) |
| Gx2 | - | - | 0.025 (0.6) | - | 0.481 (12.1) | - | 0.506 (12.8) |
| Gy1 | - | - | - | - | - | - | 0.000 (0.0) |
| Gy2 | - | - | - | - | - | - | 0.000 (0.0) |
| beam | 0.000 (0.0) | 0.000 (0.0) | 0.126 (3.2) | 0.000 (0.0) | 2.405 (60.7) | 0.000 (0.0) | 2.530 (63.8) |

total displacement= 3.965

Y 方向地震

| group | dn | dqy | dqz | dmx | dmy | dmz | dtotal |
|--------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| C1 | 0.013 (0.3) | 0.032 (0.7) | 0.001 (0.0) | 0.003 (0.1) | 0.042 (0.9) | 1.146 (23.6) | 1.237 (25.5) |
| C2 | 0.002 (0.0) | 0.021 (0.4) | - | - | 0.004 (0.1) | 0.374 (7.7) | 0.401 (8.3) |
| column | 0.015 (0.3) | 0.052 (1.1) | 0.001 (0.0) | 0.003 (0.1) | 0.046 (0.9) | 1.520 (31.3) | 1.638 (33.7) |

| group | dn | dqy | dqz | dmx | dmy | dmz | dtotal |
|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|
| Gx1 | - | - | 0.002 (0.0) | - | 0.035 (0.7) | 0.002 (0.0) | 0.039 (0.8) |
| Gx2 | - | - | - | - | 0.002 (0.0) | 0.001 (0.0) | 0.003 (0.1) |
| Gy1 | - | - | 0.121 (2.5) | - | 2.315 (47.7) | 0.002 (0.0) | 2.438 (50.2) |
| Gy2 | - | - | 0.037 (0.8) | - | 0.700 (14.4) | 0.001 (0.0) | 0.738 (15.2) |
| beam | 0.000 (0.0) | 0.000 (0.0) | 0.160 (3.3) | 0.000 (0.0) | 3.051 (62.8) | 0.006 (0.1) | 3.218 (66.3) |

total displacement= 4.855

3. 変位寄与量比例法

3. 1 基礎理論

部材要素群を、変形以外の制約で決まる要素群(応力や座屈、ディテール等)と、変形の制約で決まる部材要素群とに分離できるとする。前者を変形に対する受動要素とし、部材グループ番号($i=1,2,\dots,t$)で対応させ、後者を変形に対する能動要素とし、部材グループ番号($i=t+1,t+2,\dots,m$)で対応させる。このように分類すると、建物の総鉄骨重量は、(3)式で示される。

$$W_{total} = \sum_{i=1}^t w_i + \sum_{i=t+1}^m w_i \quad (3)$$

能動要素のみ断面変更をしたとすると、断面積に乗じる変更係数 α_i を用いて、総鉄骨重量は(4)式となる。

$$W_{total} = \sum_{i=1}^t w_i + \sum_{i=t+1}^m \alpha_i w_i \quad (4)$$

鉄骨部材を用いて構造設計を行う場合、仕口部の加工しやすさを考えて、柱せい・梁せいを統一し、板厚のみで断面を調整する方法がある。この場合、H形鋼や箱形鋼の断面2次モーメントは、フランジ部分の断面積におおむね比例することになる。せん断用断面積は、ウェブの断面積またはフランジの断面積であるから、断面積 A_i が α_i 倍になれば、(2)式に示した A_{y_i} 、 A_{z_i} 、 I_{y_i} はそれぞれ約 α_i 倍になる。H形鋼の場合 J_i 、 I_{z_i} は α_i 倍にはならないが、先に示した例題のようにねじれ回りの曲げモーメントの変位寄与量値が小さいならば、断面が変化したときの J_i 、 I_{z_i} の変化量に対する d_{lki} の変化量は無視できるものと考えられる(箱形鋼の場合は、 A_i が α_i 倍になれば、 I_{z_i} も約 α_i 倍となり、 J_i の変化量に対する d_{lki} の変化量のみ無視する)。以上より(2)式を(5)式のように変換できる。

$$d_{lki} = \frac{F^*_{lki}}{A_i} \quad (l=1,2 \quad k=1,2,\dots,n \quad i=1,2,\dots,m) \quad (5)$$

ここに F^*_{lki} は、材料定数と断面のせいと応力の関数として与えられる。(5)式を(1)式に代入して、(1)式の両辺を A_i で偏微分すると(6)式となる。

$$\frac{\partial \delta_{lk}}{\partial A_i} = -\frac{F^*_{lki}}{A_i^2} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{A_j} \frac{\partial F^*_{lki}}{\partial A_i} \quad (l=1,2 \quad k=1,2,\dots,n \quad i=1,2,\dots,m) \quad (6)$$

(6)式は、ある荷重条件下のある節点変位量の断面積 A_i に対する1次感度である。静定構造物の場合は、断面積が変化することによる F^*_{lki} の変化は生じない。よって(6)式右辺の第2項は無視できる。不静定構造物の場合は無視できないが、断面変更後逐次応力解析を行い、その操作を繰り返せば、断面積が変化することによる F^*_{lki} の変化量を考慮したことになり、繰り返し計算の中の各ステップでは、(6)式右辺の第2項は無視できる。以上の理由より、 p サイクル目の断面積を $A_i^{(p)}$ の変位寄与量を $d_{lki}^{(p)}$ とすると、 $p+1$ 回目のサイクルでは、(5)式の関係を用いて(7)式の関係が得られる。

$$\frac{A_i^{(p+1)}}{A_i^{(p)}} = \frac{d_{lki}^{(p+1)}}{d_{lki}^{(p)}} = \alpha_i \quad (l=1,2 \quad k=1,2,\dots,n \quad i=1,2,\dots,m) \quad (7)$$

この方法をここでは、「部材せいが一定」という条件下の、変位寄与量比例法(displacement participation factor-ratio method)と呼ぶ。この方法は、文献6)に示されている応力比例法(stress-ratio method)と同じ考え方である。すなわち、 A_i が α_i 倍になれば、 d_{lki} は $1/\alpha_i$ 倍となる。応力比例法と同様に、収束を早める一つの手段として、(8)式

に示すように加速係数 β ($\beta \geq 1$)を用いることも可能である。

$$\frac{A_i^{(p+1)}}{A_i^{(p)}} = \left(\frac{d_{lki}^{(p)}}{d_{lki}^{(p+1)}} \right)^\beta = \alpha_i^\beta \quad (l=1,2 \quad k=1,2,\dots,n \quad i=1,2,\dots,m) \quad (8)$$

これは、 A_i を増加させると応力が増加するので F^*_{lki} が増加し、 d_{lki} を $1/\alpha_i$ 倍にさせる A_i は、 α_i 倍より大きな値でなければならないことを示す。

ところで、(6)式の1次感度値をそのまま用いて、 α_i を求める方法がある。この方法は、より精緻化された断面変更方法であるといえる。R.H.Gallagher⁶⁾は、不静定トラス構造物を例にとり、許容応力を制約条件として、最小重量設計を目的とした、応力比例法と感度解析による方法とを比較している。その結果、解説した例題においては、初期値が収束値よりかけ離れている場合、感度解析では解が発散するが、応力比例法では収束することを示している。しかし一方で、収束値の近似解が求めれば、それ以降の収束のスピードは、感度解析の方が、応力比例法よりも速いことを示している。その理由として、感度解析は、非線形方程式を解くときのNewton法に対応する手法であるので、以上述べたような傾向が見られると解説している。また、感度解析と応力比例法を併用する方法も有効であると述べている。このような考え方に立てば、変位寄与量比例法と感度解析を併用する方法も有力であると予想されるが、ここでは検討しない。

3. 2 節点制約が複数個の場合の最適化手法

制約を指定した節点が、(4)式で示した断面変更を行った後、制約変位量($D_{node \ design}$)を満たしているとすると w_i は A_i に比例するので(1)式、(7)式より(9)式が得られる。

$$D_{node \ design} = \sum_{i=1}^t d_{lki} + \sum_{i=t+1}^m \frac{d_{lki}}{\alpha_i} \quad (l=1,2 \quad k=1,2,\dots,n) \quad (9)$$

(9)式は、 $2 \times n$ 個の制約変位量があることを示す。ここで変位制約を受けながら、最小重量設計を目的とした断面変更を考える。すなわち、(9)式の制約条件下で、(4)式の目的関数を最小にすることを考える。そこで、Lagrange乗数 λ を用いて、(10)式の関数を考える。

$$F(\alpha, \lambda) = \sum_{i=1}^t w_i + \sum_{i=t+1}^m \alpha_i w_i + \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^n \lambda_{lk} \left(\sum_{i=1}^t d_{lki} + \sum_{i=t+1}^m \frac{d_{lki}}{\alpha_i} - D_{node \ design} \right) \quad (10)$$

(9)式を満足する条件下の、関数の(4)式の極値を与える α の必要条件は(11)式を満足する。

$$\frac{\partial F(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha_i} = w_i - \frac{1}{\alpha_i^2} \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^n \lambda_{lk} d_{lki} = 0 \quad (i=t+1, t+2, \dots, m) \quad (11)$$

よって α は(12)式で与えられる。

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^n \lambda_{lk} d_{lki}}{w_i}} \quad (i=t+1, t+2, \dots, m) \quad (12)$$

(12)式を(9)式に代入すると α が消去でき、(13)式に示す λ の関数が得られる。

$$f_{lk}(\lambda) = \sum_{i=1}^t d_{lki} + \sum_{i=t+1}^m d_{lki} \sqrt{\frac{w_i}{\sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^n \lambda_{sr} d_{sri}}} - D_{node \ design} = 0 \quad (l=1,2 \quad k=1,2,\dots,n) \quad (13)$$

(13)式はλに関する2×n元の非線形連立方程式である。よって、(13)式のλに関する解を求めれば、(12)式よりαが求まる。ただし、この方法は(11)式で述べたように、あくまでαを求めるための必要条件であり、十分条件ではない。しかし、得られた解を工学的に判断してより最適化の方向に進んでいると判断できる場合は、有効な手法となると考える。ここでは、この非線形連立方程式を解く方法として、以下に示す方法を考える。

(a) 最急降下法

(13)式の非線形連立方程式を解くことと、(14)式のλに関する方程式を解くことは同値である。つまり、(13)式の非線形連立方程式の解が存在すれば、S(λ)=0で最小値をとるので、制約条件無しの変数関数の最小値を解くときの最急降下法が適応できる。

$$S(\lambda) = \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^n f_{lk}(\lambda)^2 = 0 \quad \text{----- (14)}$$

最急降下法においては、初期値λ⁽⁰⁾を与え、(15)式に示す手順でλの次項列を求める。なおpは、この手順の繰り返し回数を示す。μ(λ^(p))は、探索方向を示し、βは、0~2の範囲の直線探索を行う係数である。(16)式に示すように、このβは、0~2の範囲で関数S(λ^(p+1))を最小値にする値をとる。なお、μ(λ^(p))は(17)式で与えられる。

$$\lambda^{(p+1)} = \lambda^{(p)} + \beta \mu(\lambda^{(p)}) \quad \text{----- (15)}$$

$$S(\lambda^{(p+1)}) = \text{MIN}_{2 \geq \beta > 0} [S(\lambda^{(p)} + \beta \mu(\lambda^{(p)}))] \quad \text{----- (16)}$$

$$\mu(\lambda^{(p)}) = - \begin{bmatrix} \frac{S(\lambda^{(p)})}{\partial \lambda_{11}} \\ \frac{S(\lambda^{(p)})}{\partial \lambda_{12}} \\ \vdots \\ \frac{S(\lambda^{(p)})}{\partial \lambda_{2n}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^n f_{lk}(\lambda^{(p)}) \frac{f_{lk}(\lambda^{(p)})}{\partial \lambda_{11}} \\ 2 \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^n f_{lk}(\lambda^{(p)}) \frac{f_{lk}(\lambda^{(p)})}{\partial \lambda_{12}} \\ \vdots \\ 2 \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^n f_{lk}(\lambda^{(p)}) \frac{f_{lk}(\lambda^{(p)})}{\partial \lambda_{2n}} \end{bmatrix} \quad \text{----- (17)}$$

(b) Newton 法

非線形連立方程式を解く場合の、Newton 法による反復公式は、(18)式で与えられる。ωは、0~2の範囲の直線探索を行う係数である。(19)式に示すように、このωは、0~2の範囲で(14)式の関数S(λ^(p+1))を最小値にする値をとる。

$$\lambda^{(p+1)} = \lambda^{(p)} - \omega J^{-1}(\lambda^{(p)}) f(\lambda^{(p)}) \quad \text{----- (18)}$$

$$S(\lambda^{(p+1)}) = \text{MIN}_{2 \geq \omega > 0} [S(\lambda^{(p)} - \omega J^{-1}(\lambda^{(p)}) f(\lambda^{(p)}))] \quad \text{----- (19)}$$

ここに、J⁻¹(λ^(p))はヤコビ行列の逆行列で、ヤコビ行列は(20)式で、ヤコビ行列の各項は(21)式で与えられる。

$$J(\lambda^{(p)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{11}(\lambda^{(p)})}{\partial \lambda_{11}} & \dots & \frac{\partial f_{11}(\lambda^{(p)})}{\partial \lambda_{2n}} \\ \frac{\partial f_{12}(\lambda^{(p)})}{\partial \lambda_{11}} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_{2n}(\lambda^{(p)})}{\partial \lambda_{11}} & \dots & \frac{\partial f_{2n}(\lambda^{(p)})}{\partial \lambda_{2n}} \end{bmatrix} \quad \text{----- (20)}$$

$$\frac{\partial f_{lk}(\lambda)}{\partial \lambda_{ju}} = \frac{1}{2} \sum_{i=t+1}^m \frac{d_{lki} d_{jui} \sqrt{w_i}}{\left[\sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^n \lambda_{sr} d_{sri} \right]^{\frac{3}{2}}} \quad \text{----- (21)}$$

(l=1,2 k=1,2,...,n j=1,2 u=1,2,...,n)

(c) 最急降下法と Newton 法とのハイブリッド

(14)式のS(λ)を、最急降下法と Newton 法の両方において計算し、より小さなS(λ)を与えるλ^(p+1)を次項列として採用する方法も考えられる。文献7)によれば、局所最適解を何らかの非線形計画法により解く場合、初期値が求める解から遠い場合に、その初期値を変更して、初期近似解を求める手順を解法の大域的フェーズ(global phase)と呼び、初期近似解が求まってから、実際の解を求める手順を解法の局所的フェーズ(local phase)と呼んでいる。さらに文献7)8)では、大域的フェーズの一般的解法として最急降下法を、局所的フェーズの一般的解法として Newton 法を示している。厳密にどの解法の手順がどちらのフェーズに向けた方法であるかは言えないが、(a)~(c)のそれぞれの解析手法で検討を行い、解の収束性や結果の比較を行うことは重要であると考えられる。

(d) 収束判定

λ^(p+1)が与える f_{lk}(λ)が(22)式を満たす値となったとする。この右辺の項を左辺に移項すると(23)式が得られる。

$$f_{lk}(\lambda)^2 = z_{lk}^2 \quad (l=1,2 k=1,2,\dots,n) \quad \text{----- (22)}$$

(23)式の(Dnode design_{lk} ± z_{lk})の項は、指定した節点変位量 Dnode design_{lk}に対して、±z_{lk}の余裕幅に収まっていることを意味する。ここでは、(24)式に示すように、すべてのlとkに対し、±z_{lk}の余裕幅がある値以下に収まっていれば収束したと判定する。

$$f_{lk}(\lambda) \pm z_{lk} = \sum_{i=1}^l d_{lki} + \sum_{i=t+1}^m d_{lki} \sqrt{\frac{w_i}{\sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^n \lambda_{sr} d_{sri}}} - (Dnode\ design_{lk} \mp z_{lk}) = 0 \quad \text{----- (23)}$$

(l=1,2 k=1,2,...,n)

$$\varepsilon_{lk} \geq |z_{lk}| \quad (l=1,2 k=1,2,\dots,n) \quad \text{----- (24)}$$

3. 3 節点制約が1個の場合の最適化手法

節点制約が1個の場合は、(9)式(12)式(13)式を用いてλ、α_iが一義的に求まり、(25)式(26)式で与えられる。

$$\lambda = \left(\frac{\sum_{j=t+1}^m \sqrt{w_j d_j}}{Dnode\ design - \sum_{j=1}^t d_j} \right)^2 \quad \text{----- (25)}$$

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{d_i}{w_i}} \left(\frac{\sum_{j=t+1}^m \sqrt{w_j d_j}}{Dnode\ design - \sum_{j=1}^t d_j} \right) \quad (i=t+1, t+2, \dots, m) \quad \text{----- (26)}$$

ここでは上述した解が大域的最小値であることを証明する。そのためには、この問題が凸計画問題(convex programming problem)であること、つまり制約条件(9)式と目的関数(4)式とが共にαに関して凸関数であることを証明すれば良い。ところで、関数f(x)が凸関数であるためには、もしf(x)が2階微分可能であるならば、f(x)のヘッセ行列 Hess(x)が半正定値となることを示せば良い⁹⁾¹⁰⁾。よって、任意の実数ベクトルx、y(x≠y)を考えると、(27)式が成り立てばよい。(但しTは転置行列の記号)

$$(x-y)^T Hess(x)(x-y) \geq 0 \quad \text{----- (27)}$$

ここで目的関数(4)式と制約条件(9)式のαをxに置き換え、節点制約が1個の場合のf(x)、g(x)を考える。

$$f(x) = \sum_{i=1}^l w_i + \sum_{i=r+1}^m x_i w_i \quad \text{----- (28)}$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^l d_i + \sum_{i=r+1}^m \frac{d_i}{x_i} - D_{node\ design} \quad \text{----- (29)}$$

まず、 $f(x)$ の $Hess(x)$ は、(30)式となり、(27)式の左辺がゼロになるため、 $f(x)$ は凸関数と言える。

$$Hess(x) = [0] \quad \text{----- (30)}$$

次に $g(x)$ の $Hess(x)$ は、(31)式となる。

$$Hess(x) = \begin{bmatrix} \frac{2d_1}{x_{r+1}^3} & & & 0 \\ & \frac{2d_2}{x_{r+2}^3} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{2d_m}{x_m^3} \end{bmatrix} \quad \text{----- (31)}$$

(31)式を用いると、(27)式の左辺は、(32)式となる。

$$(x-y)^T Hess(x)(x-y) = \sum_{i=r+1}^m \frac{2d_i}{x_i^3} (x_i - y_i)^2 \quad \text{----- (32)}$$

ところで d_i が負であるならば、解(26)式のルートの中が負となり、実数解が得られない。一方 d_i が正の値をとれば(26)式より、 w_i は正なので $x_i (= \alpha_i)$ は正となり、よって(27)式の関係が成り立つ。故に $g(x)$ は、(26)式の実数解が求まれば凸関数である。以上より、目的関数と制約条件式が共に凸関数であるので、Lagrange 乗数法が α を求めるための必要十分条件を満たし、求まった解は大域的最適解であると断定できる。しかし、変形を制約する節点を複数個指定する場合は、この限りではない。これは、ある一つの d_{lki} が負値であっても、(12)式の $\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^n \lambda_{lki} d_{lki}$ が正値となって α の解が求まる場合があるという理由による。(32)式の右辺が非負値であるかどうかは、より詳細な検討が必要であると思われる。

4. 立体骨組に対する変形制御

4. 1 アルゴリズム

前節で述べた基礎理論は、前著¹⁾で示した平面骨組に適応した基礎理論を発展させたものである。この基礎理論を立体骨組に適応させる場合、特に次の点に注意を払う必要がある。

一般的に骨組に荷重を作用させたとき、それに対して何も影響を受けない部材、すなわち剛体変位は生じるものの部材変形は生じず、結果として応力も生じない部材が表れる。このようなことは平面骨組においても生じるが、立体骨組の場合は荷重の作用方向によって、影響を受けない部材の数は相当多くなりうる。ここで用いている理論では、荷重に対して発生する応力を基本に計算を進めているため、特に立体骨組を対象とする場合は、応力の発生しない部材の取り扱いが重要になる。そこで、今回はX方向とY方向の2つの荷重ケースを与え、2つの荷重ケースに影響されない部材は、受動要素として断面変更の対象から取り外し、断面変更の対象となる部材要素は、少なくとも1つ以上の荷重ケースに影響を受けるように設定している。さらに、複数の荷重ケースに影響を受ける部材要素は、それぞれの荷重ケースに対応した変形の制約条件が連立されて、部材断面の変更に反映されるアルゴリズムとなっている((9)式参照)。このアル

ゴリズムを利用して、ここでは、建物の層間変形とねじれ変形に注目した部材断面変更法を論じる。

建築の構造設計においてしばしば用いられる剛床仮定の下で、変位制約を満たす骨組を考えると、図2に示すように、各フロアの任意の2点の水平変位量を指定すれば、指定した方向の地震力に対する層間変位量 δ とねじり変位量 θ を指定することになる。検討する地震力方向が2ケースの場合は、制約条件数としては、1フロア当たり4つの制約節点変位量(図2の $\delta_{x1}, \delta_{x2}, \delta_{y1}, \delta_{y2}$)が発生する。今回のアルゴリズムでは、これらを指定することにした。

ところで、骨組のある1つの節点の変位量を指定して最小重量設計を行う問題に対し、提案した方法は、実数解が求まれば、大域的最小値を与えることを述べた。しかし、変位を指定する節点が複数個存在する場合は、より非線形性が強くなるため、初期フレームの断面形状が、求める解から遠いところにある場合は、解の収束性に影響を与えると思われる。そこで、剛床仮定条件下で、ある一方向荷重に対して、建物頂部の重心位置に変位制約を与えて、最小重量設計を行い、求まった解を初期最適化断面とする。このとき、応力の発生しない部材は受動要素とし、断面変更の対象から外す。立体骨組では、全体座標系で X,Y 各方向の荷重ケースの検討を必要とするので、2通りの解析を行い得られた断面の大きい方を初期最適化断面として採用する。但しこの方法は、X,Y 両方向の荷重ケースに影響を受ける部材要素は、それぞれの荷重ケースに対応した変形の制約条件が連立されずに、初期最適化部材断面として変更される点に注意が必要となる。

以上の方法により、解析で求まった α を、フランジやウェブの板厚に乗じて断面の変更を行う。断面の変更後、逐次断面性能を計算しながら骨組解析を行った後、再び最適化のアルゴリズムにより部材断面を変更し、さらにこれらのループを繰り返しながら収束させる方法を採用する。これは、先に述べた「断面積 A_i が α_i 倍になったとき、 J_i, I_{zi} は α_i 倍にはならない」といったアルゴリズムの欠点を逐次補正する意味を持つ。収束条件は、経済パラメータである総鉄骨量の偏差 ΔW が十分小さな値になったときと定めた。以上解説した手順をフローチャートにすると図3に示すとおりとなる。ただし、初期最適化断面を求めるための ΔW の制限値は ϵ_a 、最適化断面を求めるための ΔW の制限値は ϵ_b とし、 ϵ_b が ϵ_a より小さくなるように定めた。

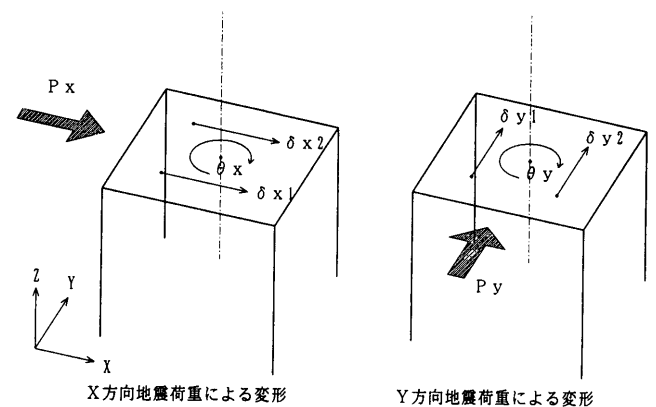


図2 剛床仮定の場合の各層の変位制御

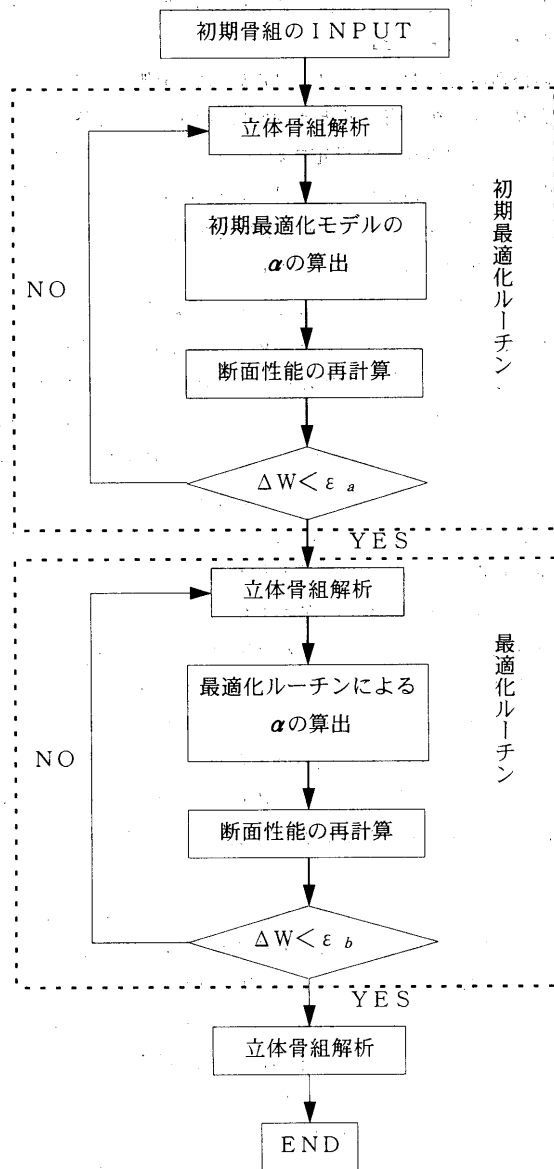


図3 解析フローチャート

4.2 解析例(その1)

ここでは、先に図1で示した例題を使って建築基準法施行令に示されている層間変形角・剛性率・偏心率に注目した解析例を示す。制約条件としては、以下に示したものを考える。

- a. 層間変形角は、1/200 に指定する。
- b. 剛性率は、1.0 に指定する(各層を同じ層間変形角に指定する)。
- c. 偏心率は、0.0 に指定する(ねじれ変形をなくす)。

解析結果を表4～表6および図4～図5に示す。表4～表5には、断面変更前後のXY各地震力方向の層間変形角、剛性率、偏心率の値を示した。表の値が示すように、断面変更後は上述した制約条件に指定されていることが分かる。特に、層間変形角は、XY各方向共1階部分が改善され、偏心率は、セットバックの影響を受けたY方向が改善されていることが分かる。図4には、断面変更前後のXY各通りのフレーム図を示す。線の太さは、断面積に比例するように示してある。この図が指し示すように、X方向地震に対しては、偏心が無いため、X1～X3通りのフレームは左右対称の形状となる。一方Y方向

地震に対しては、X1 通り側にセットバックしている影響で、Y方向地震力に対する剛心をX1～X2 通り側に近づけるため、X1～X2 通りの1階の柱、2階床の梁に鉄骨量が集まっていることが分かる。図5には、断面変更の繰り返し回数と、総鉄骨重量の変化を示す。図は、先に述べた加速度係数βをパラメータとした収束状況の比較を行っている。初期最適化ルーチンでは、一時的に必要とされる総鉄

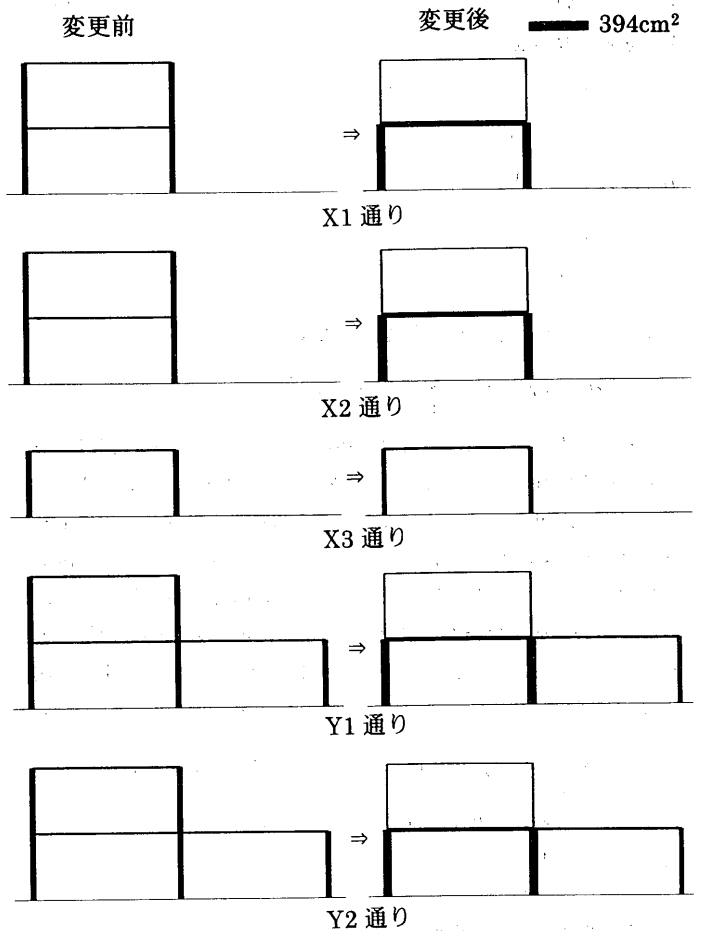


図4 断面変更前後のフレーム図

表4 断面変更前の変形状態

| X方向地震力 | | | |
|--------|-------|-------|-------|
| 階数 | 層間変形角 | 剛性率 | 偏心率 |
| 2階 | 1/294 | 1.315 | 0.000 |
| 1階 | 1/153 | 0.685 | 0.000 |

| Y方向地震力 | | | |
|--------|-------|-------|-------|
| 階数 | 層間変形角 | 剛性率 | 偏心率 |
| 2階 | 1/234 | 1.259 | 0.037 |
| 1階 | 1/138 | 0.741 | 0.177 |

表5 断面変更後の変形状態

| X方向地震力 | | | |
|--------|-------|-------|-------|
| 階数 | 層間変形角 | 剛性率 | 偏心率 |
| 2階 | 1/200 | 1.002 | 0.000 |
| 1階 | 1/199 | 0.998 | 0.000 |

| Y方向地震力 | | | |
|--------|-------|-------|-------|
| 階数 | 層間変形角 | 剛性率 | 偏心率 |
| 2階 | 1/200 | 1.002 | 0.004 |
| 1階 | 1/199 | 0.998 | 0.003 |

骨量が増えるが、その後減少して収束する。最適化ルーチンでは、初期最適化ルーチンでの総鉄骨量より増加して収束している。この理由は、初期最適化ルーチンにおいては、ねじれ変形に対する制約を与えておらず、また各層の層間変形角を指定していないので、最適化ルーチンよりも、少ない鉄骨量に収束したものと考えられる。収束回数は、 $\beta=1.1$ で最小(5回)となり、 $\beta=1.5$ が最大(8回)となっている。これは、加速度係数を大きくとりすぎると、逆に収束性が悪くなる傾向を示している。しかし、いずれの β 値をとっても最終的に収束する総鉄骨量は、ほぼ同じ結果となっている。表6には、 $\beta=1.0$ のときの部材断面変更後の断面リストを示す。断面リストの中には、板厚が4mm未満のものや、30mmを超えるものがあり、計算結果をそのまま利用するのは、実用的ではない。しかし、構造の基本計画を考える上では、有益な参考資料になると思われる。なお、表6の結果は、許容応力状態は検討していないので、今後断面のせいが変化するケースも合わせて、検討する必要があると思われる。

この例題に関する、(13)式非線形連立方程式の、解法別(3.2節参照)収束状況は、次の通りである。

- ・ハイブリッド手法では、すべてのステップでNewton法が選択され、結果的にNewton法を単一で用いた手法と同一となった。
- ・最急降下法を単一で用いた場合は、解近傍において収束速さが極端に遅くなり、良い解析精度が得られなかったため、解析を打ち切った。

4. 3 解析例(その2)

ここでは、セットバックの無い高層建築物を例にとり解析例を示す。解析モデルを図6に示す。モデルは、5×5スパン23層の立体骨組で、各フレームとも同一断面となっている。境界条件は、柱脚を

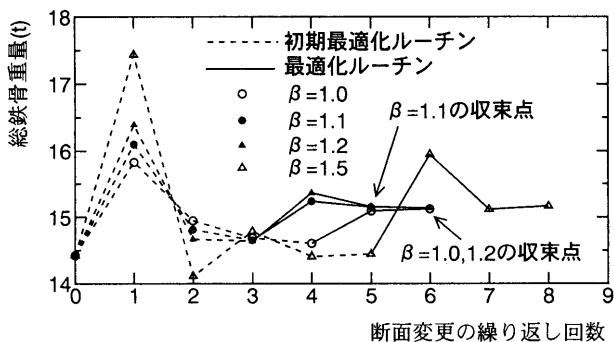


図5 総鉄骨重量の変化

表6 部材断面表 (単位 mm) $\beta=1.0$

| 柱断面リスト | | 梁断面リスト | |
|--------|----------------|--------|---------------------|
| 1 | □-400×400×23.5 | 11 | H-450×200×18.0×24.0 |
| 2 | □-400×400×26.4 | 12 | H-450×200×9.7×12.9 |
| 3 | □-400×400×12.4 | 13 | H-450×200×18.0×24.0 |
| 4 | □-400×400×23.5 | 14 | H-450×200×9.7×12.9 |
| 5 | □-400×400×26.4 | 15 | H-450×200×3.4×4.6 |
| 6 | □-400×400×12.4 | 16 | H-450×200×3.4×4.6 |
| 7 | □-400×400×3.9 | 17 | H-450×200×25.4×33.9 |
| 8 | □-400×400×4.3 | 18 | H-450×200×22.5×30.0 |
| 9 | □-400×400×3.9 | 19 | H-450×200×9.6×12.8 |
| 10 | □-400×400×4.3 | 20 | H-450×200×3.5×4.6 |
| | | 21 | H-450×200×3.5×4.6 |

※ iは要素番号を示す

固定とし、その他の解析条件、制約条件は、解析例(その1)と同じである(2.2節、4.2節を参照)。また、 $\beta=1.0$ として解析している。

図7には、解析前後の層間変形角を示している。グラフより、断面変更後は、全層共に層間変形角 1/200(=0.005)に収束していることが分かる(モデルはX方向Y方向共に左右対称のためねじれ変形は生じない)。図8には、断面変更前後のフレーム図を示す。前回同様、線の太さは、断面積に比例するように示してある。解析モデルの対称性により、解析結果は3フレームのみ示すことにする。この図より、各フレームとも柱・梁共に低層階においてはスパンの外周部分に、中層高層階においてはスパンの中央部分に鉄骨が集まっている。さらに、外周のフレーム(X1,X6,Y1,Y6)よりも、内側のフレーム(X3,X4,Y3,Y4)の方が、よりスパン中央高層部分に鉄骨が集まる傾向が見られ、全体的に釣鐘状に配分されている。この傾向は、前著の平面骨組による解析結果と同様な傾向を示すが、外周と内側の各スパンにおいて解析結果に違いが生じていることから、立体効果が考慮された断面変更がなされていることが分かる。図9には、総鉄骨重量の収束状況を示しており、示した例題では総鉄骨重量の約10バ

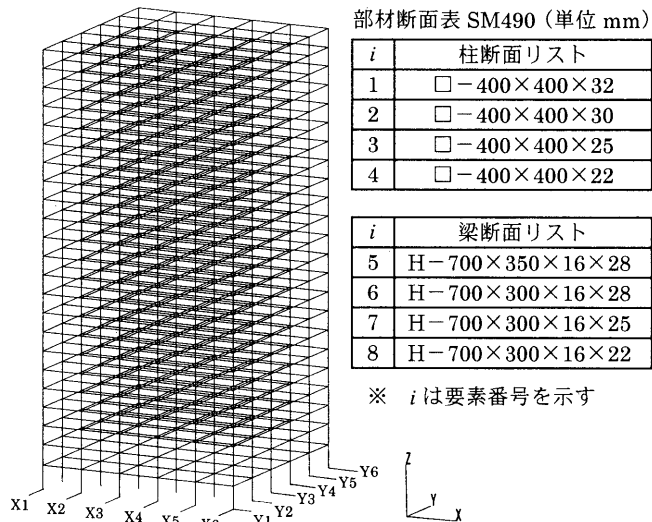
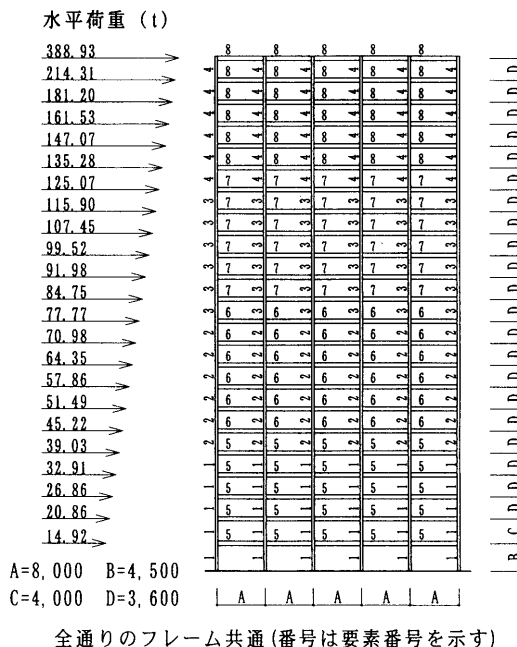


図6 解析モデル

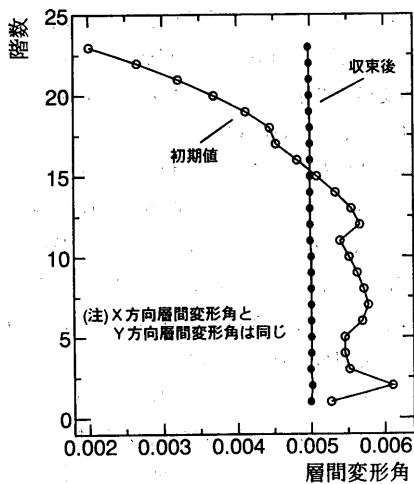


図7 層間変形角

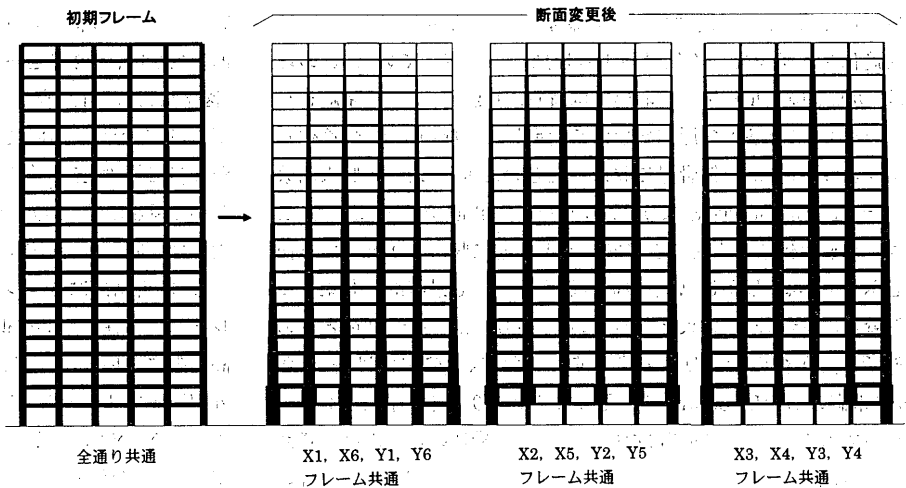


図8 断面変更前後のフレーム図

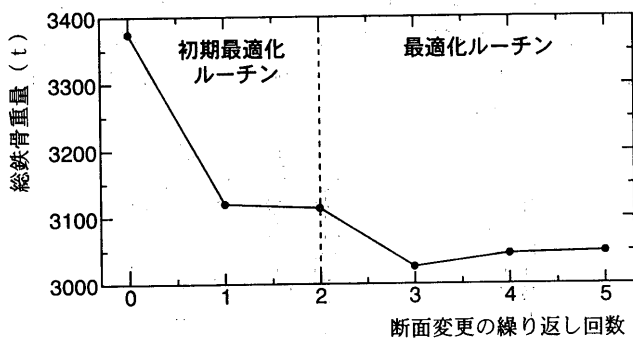


図9 総鉄骨重量の変化

一セントが減少している。

この例題に関する、(13)式 of 非線形連立方程式の、解法別(3.2 節参照)収束状況は、次の通りである。

- ・ハイブリッド手法では、解法の初期ステップで最急降下法が選択され、その後はNewton法が選択されて解が収束した。
- ・Newton法を単一で用いた手法も収束し、ハイブリッド手法と同一の結果となった。
- ・最急降下法を単一で用いた場合は、解近傍において収束速さが極端に遅くなり、良い解析精度が得られなかったため、解析を打ち切った。

5. まとめ

1. 全体座標系でX,Y 2方向の荷重ケースの検討を必要とする、鉄骨造弾性立体骨組に対して、各荷重ケースごとに複数の節点変位を制御することにより、層間変形や建物のねじり変形を指定した下で、最小重量設計を目的とした部材断面の変更を行う必要条件を示し、そのアルゴリズムを提案した。
2. 提案したアルゴリズムで、制約節点変位が1個の場合においては、解が求まるとすれば、求まる解は最適規準の必要十分条件を満たし、大域的最適解であることを証明した。
3. 提案したアルゴリズムを用いて、セットバックを有するモデルと有しないモデルについて、鉄骨造立体骨組の断面変更例を示した。

参考文献

- 1)内村均, 佐藤和英, 和田章, 黒正清治: 水平変形に注目した鉄骨骨組の部材断面変更法, 日本建築学会構造系論文集, 第485号, pp.73-80, 1996年7月
- 2)D.E.Grierson, C.M.Chan: Design Optimization of Tall Steel Buildings, Optimization of Structural Systems and Industrial Application, pp541-551, 1991.7
- 3)中村恒善, 小坂郁夫: 水平力を受ける弾性立体建築骨組のひずみ制御設計, 日本建築学会構造系論文報告集, 第388号, pp.45-58, 1988年6月
- 4)堤和敏: ニューラルネットワークを利用した鉄骨造弾性立体骨組の性能指定最小重量設計法, 日本建築学会構造系論文集, 第496号, pp.137-141, 1997年6月
- 5)F.A.Charnay: Sources of Elastic Deformation in Laterally Loaded Steel Frame and Tube Structures, Tall Buildings 200 and Beyond, 1990.11
- 6)R.H.Gallagher, O.C.Zienkiewicz 共編 川井忠彦・戸川隼人 監訳: 最適構造設計 基礎と応用, 第3章 全応力設計, 培風館, pp.7-29, 1973
- 7)G.L.Nemhauser, A.H.G.Rinnooy Kan, M.J.Todd 共編 伊理正夫・今野浩・刀根薫 監訳: 最適化ハンドブック, 朝倉書店, 1989
- 8)大野豊, 磯田和男(監修): 数値計算ハンドブック, オーム社,
- 9)山川浩: 最適化デザイン, 培風館, 1993
- 10)茨木俊秀, 福島雅夫: 最適化の手法, 共立出版, 1993

(1998年4月10日原稿受理, 1998年8月21日採用決定)