I. 構造設計と構造解析

線形応力解析の役割

和田 章●東京工業大学建築物理研究センター教授

各種の理論

問題に応じて解法を用意する昔の方法をクラシックセオリー，汎用的な理論を開発し，できる限り多くの問題を共通の方法によって解こうとするのをモダンセオリーと呼ぶことができる。目の前にあるものの性質を明らかにしようとするとき，その対象を分析し基本要素を見極め，その基本要素の持っている性質を明らかにしたあと，これらを数学的に組み上げていくことによって全体の性質を明らかにしようと言うのが我々の追い求めてきたモダンセオリーである。

数学というより算数の領域に入るが，鶴亀算，過不足算などの応用問題を小学校のころよく解かされ，楽しんだ。中学に進学し，未知量を既知量のように扱って方程式を立てる方法，そして連立方程式の解き方を習ってしまうと，どんな応用問題でも同じように解けてしまう。小学校のときの楽しみはつまらないものになってしまった。大学に入ったのは，わが国においても構造設計に電子計算機が使われ始めたころと思うが，講義・演習の時間には切断法，クレモナ法によるトラスの解法，固定モーメント法，撓角法，武藤式略算法などによるラーメン解法など，問題の種類に応じて作られた解法を習っていった。その後，わが国にも大型計算機が導入され，身近に電子計算機が使えるようになって，節点変位を未知量として連立方程式を立てれば，トラスもラーメンもみな同じように解けることを知った。ちょうど，小学校の応用問題が中学校の連立方程式でみな解けてしまうのと同じである。

それから30年，大学での教育はそれほど変わっていない。技術者の素養を育てるためには鶴亀算のようなクラシックセオリーが役立ち，実社会では連立方程式の解法を利用したモダンセオリーが役立つと考えられているのであろう。真の構造設計者を育てるのにどのような教育をすればよいと言う答えはまだ見つかっていない。モダンセオリーには文化がなく，クラシックセオリーには文化があるように思える。これらの理論・解析が実際の構造物の安全性にどのように関与しているのか本稿で考察する。

構造物内部の応力

構造力学を学ぶ場合，力のつり合いについての考え方を習得したあと，作用する力と生じる変形の間に正比例の関係があるとする線形解析理論を習う。先に述べた各種の方法である。最近ではマトリックス変位法による骨組解析，有限要素解析についても学ぶことが多くなっていると思う。

構造力学を深く理解しようとするならば，構造実験にも多くの時間を使わなければならない。外力を受ける構造物の性質を見るとき，鉄筋コンクリート構造ではひび割れなどが入るため，実験から得られる外力と変位の関係はとても線形とは言い難い（図1）。鋼構造では鋼材に明確な

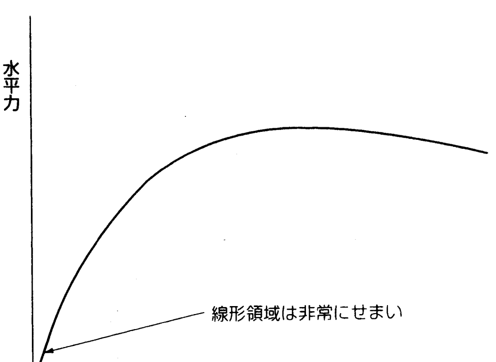

図1 鉄筋コンクリート骨組の荷重変形関係

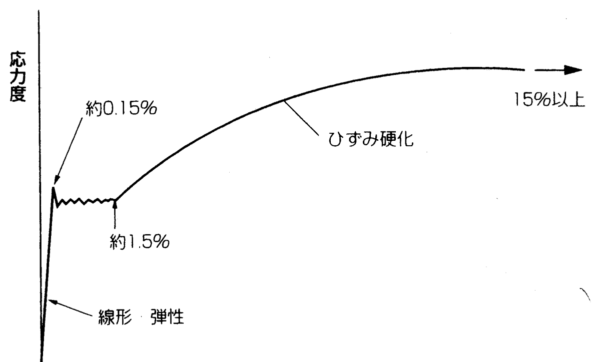

図2 鋼材の応力ひずみ関係

線形・弾性の領域があるから，構造解析を線形理論によっていることに矛盾はないが，鋼材の降伏ひずみは0.15%前後，ひずみ硬化開始のひずみは1.5%前後，その後，最終的に破断するまでは15%以上の伸びがあるから線形・弾性の範囲だけを利用しようとするのでは，鉄の伸び能力の1/100しか使っていないことになる（図2）。

実際に建築構造物を建設していく過程を見ると，でき上がる建築構造物は無重力の宇宙で作ってから地球上にそっと降ろしているわけではないから，施工の順序，形枠・支持材を外すタイミングで構造物内部の応力状態は大きく異なってくる。鋼構造の場合は形鋼の生産過程で高温の鉄を徐々に冷やしていくため，早く冷えた部分と最後に冷えて固まる部分の間に無理が生じ，最後に冷える部分の材軸方向に引張りの残留応力が残る。溶接構造でも同じであり溶接部分には一般に引張りの残留応力が残る。

これらの簡単な考察から，構造物の設計の際に線形・弾性の仮定のもとに行っている応力計算の結果は実際の構造物内部に発生している応力と同じとはとても言えないことがわかる。

下界の定理

実際を表わしていない線形・弾性の仮定で構造計算を行った建物が，今まで倒れずに残っているのはなぜであろうか。これには色々な答えがあろう。例えば，材料安全率を用いた許容応力度である。先に述べた鋼材中の残留応力は実際に調べた結果によると，降伏応力度に達している例もあると言う。このような鋼材が組み立てられてできる実際の構造物に所定の荷重・外力が作用した場合，至る所で発生応力は許容応力度を超える。材料安全率だけを用いた考察で構造物が倒れないことを説明することはできない。塑性理論の助けを借りなければ，これは説明できない。

塑性理論の有名な定理に「下界の定理」がある。これは一言で説明すると，「構造材料，構造部材にある程度の塑性変形能力が備わっていることを前提にすれば，外力につり合う任意の応力状態を見つけ，この応力分布が構造物内のどの部分においても，その部分の耐力を超えていない場合，考えている応力分布に対応するこの外力はその構造物の真の最大耐力より等しいか小さい」と言うことになる。

これを線形・弾性の仮定のもとに行われる応力解析結果に適用してみる。荷重・外力には荷重係数による安全率を考えず，材料安全率のみを考える。線形・弾性の仮定の下にマトリックス変位法などを用いて求められる応力分布は当然，設定した荷重・外力につり合っている。この応力分布に対して材料安全率を考慮して部材設計が行われるから，すべての部分で求められた応力分布，つまり考えた応力分布は構造物の部材耐力に対してどの部分でも少なくとも材料安全率と同じだけの余裕があることになる。

要するに，マトリックス法によって求め，ただ1つの正解のように思われる応力分布を，外力につり合い，どの部分でも部材耐力にある安全率をもって余裕を持たせた1つの応力分布であると考えるわけである。下界の定理に従って，もう少し話を進めると，「与えた荷重・外力にここで用いた材料安全率を乗じて求まる荷重・外力は，この構造物の真の崩壊荷重に等しいか小さい」と言うことになる。要するに材料安全率倍の荷重・外力までは耐えることになる。これが，線形・弾性の仮定で求めた応力に従って部材断面の設計をした建物が簡単には壊れない理由である。

線形解析結果の役割

建設された構造物に何も荷重・外力が作用していないとき，内部応力が完全にゼロであり，構造物の荷重・変形関係にある程度の線形性があるとしたら，我々が行っている線形応力解析から得られる応力分布は，構造物に生じている応力分布を表わしていることになる。この応力分布を用いて構造設計を進めると，建築構造物に設計を超える荷重が作用したときに生じる塑性変形の度合いも，各部材でほぼ同じように進むことになる。しかし，実際はこのような条件がすべてそろうことはないから，構造物の安全性について議論するとき，上で行った考察が必要になる。

これらの考察からもう1つ言えることは，実際の応力分布と設計者が考えている応力分布があまりに異なる場合には，常時荷重下，中小地震時においても構造物に塑性化が発生することになる。長期的に考えるとクリープ変形が生じる。このような意味で，適切な境界条件の設定，荷重の見積もり，構造物の剛性評価を行い，最も実際に近い応力分布を求めるように努力することに重要な意味がある。

力の軸から変形の軸へ

荷重・外力が力の軸で与えられ，その力に構造物が耐えられるか，耐えられないかという議論を進めるには以上の考察で十分である。しかし，

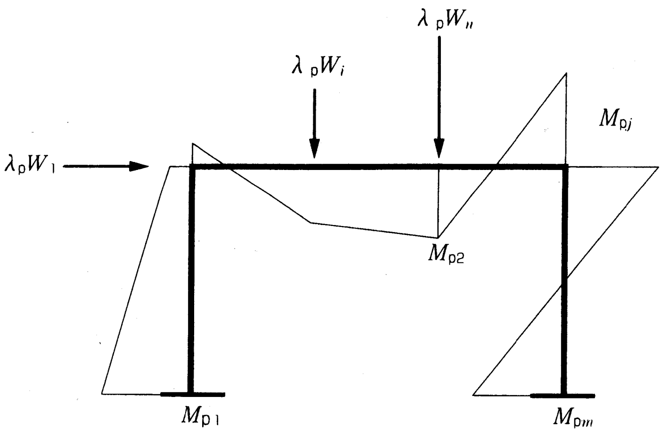

図3　$\lambda_p W_i$ を受ける骨組の曲げモーメント

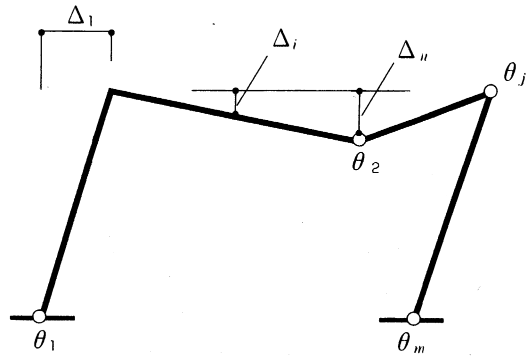

図4　崩壊メカニズム

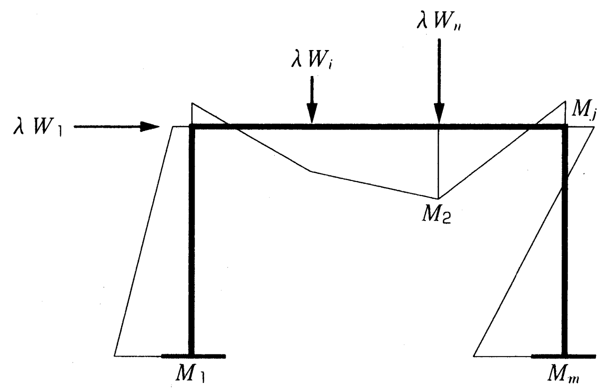

図5　λW_i を受ける骨組の曲げモーメント

大地震時には構造物の塑性化を許容して設計が行われており，耐震性はこの塑性変形に構造物の各部分が耐えられるかどうかによって測られることになる。

考える軸は，「力，耐力」だけでなく「変形，塑性変形能力」が重要になる。塑性変形は塑性化する部分の長さと塑性ひずみの積で求められ，材料によって塑性ひずみには限界があるから，構造物全体の強度分布，各部材の長さ方向の応力分析と強度分布の関係，部材の強度と接合部の強度とのつり合いなどが重要になってくる。

参考・下界の定理の証明

1950年に導かれたHorneの証明にならい，下界の定理を証明する。

構造物の i 点（$i=1, 2, \cdots, n$）に荷重 λW_i を受ける構造が塑性崩壊を起こすときの荷重係数 λ を λ_p とする。荷重が $\lambda_p W_i$ のとき崩壊メカニズムとなり，j の位置（$j=1, 2, \cdots, m$）で塑性ヒンジが生じる。塑性ヒンジの各点の塑性モーメントが M_{pj} であり，そこに生じる小さな回転角を θ_j とする（図3）。

符号の付け方は自由であるが，塑性モーメント M_{pj} の符号と回転角 θ_j の符号はそれぞれ同一方向に対して正とする。このとき，荷重 $\lambda_p W_i$ の作用点には塑性ヒンジの回転 θ_j に対応して変位 Δ_i が生じる（図4）。外力の仕事と内力の仕事が等しいことから，

$$\lambda_p \Sigma W_i \Delta_i = \Sigma M_{pj} \theta_j \qquad (1)$$

ここで，λ_p および，すべての $M_{pj}\theta_j$ は正であるから，$\Sigma W_i \Delta_i$ は正である。

ある任意の荷重係数 λ において，つり合いと降伏条件を満足する曲げモーメント分布を得たとする。先に述べた真の崩壊時に塑性ヒンジが生じた j の位置に，この荷重時に生じている曲げモーメントを M_j とすると，この応力分布は降伏条件を満足していることから，各 j 点において次の式が成り立つ。

$$-|M_{pj}| \leqq M_j \leqq +|M_{pj}| \qquad (2)$$

次に，外力 λW_i とこれにつり合う応力状態 M_j に，真の崩壊時の荷重点の変位 Δ_i とヒンジの回転角 θ_j を仮想変位として組み合わせ，仮想仕事式を作ると次のようになる（図5）。

$$\lambda \Sigma W_i \Delta_i = \Sigma M_j \theta_j \qquad (3)$$

式(1)と式(3)から，次式が得られる。

$$(\lambda_p - \lambda) \Sigma W_i \Delta_i = \Sigma (M_{pj} - M_j) \theta_j \qquad (4)$$

各 $M_{pj}\theta_j$ が正であることおよび，式(2)の条件を用いると，式(4)の右辺の各項 $(M_{pj} - M_j)\theta_j$ は正かゼロであることになる。これに $\Sigma W_i \Delta_i$ が正であることをあわせて考えると $\lambda_p - \lambda \geqq 0$ が常に成り立つことがわかる。結果として下界の定理として式(5)を導くことができる。

$$\lambda_p \geqq \lambda \qquad (5)$$

「もし，ある任意の荷重係数 λ において，外荷重につり合い，構造物中のどの部分でも降伏条件を満足している曲げモーメント分布が求められれば，その荷重係数 λ は真の崩壊荷重係数 λ_p に等しいか小さい。」

（わだ　あきら）