

階層型デジタル画像に基づく粗骨材-モルタル界面を考慮した コンクリート材料の非線形有限要素解析手法

ON A NON-LINEAR FINITE ELEMENT ANALYSIS PROCEDURE BASED ON HIERARCHICAL DIGITAL IMAGE FOR CONCRETE MATERIALS WITH CONSIDERATION OF COARSE-AGGREGATE-AND-MORTAR INTERFACE

永井学志*, 山田貴博**, 和田章***

Gakuji NAGAI, Takahiro YAMADA and Akira WADA

This paper presents a non-linear finite element analysis procedure based on a digital image for concrete materials. Our final goal is to simulate the three-dimensional compressive non-linear behaviors of concrete materials with consideration of their local tensile failures. Concrete materials are modeled as two-phase composites consisting of coarse aggregates and mortar. Digital image processing is directly used to generate a finite element mesh. A new mixed finite element in which a high-resolutional digital image is embedded is developed to model smooth interfaces between coarse aggregates and mortar on the finite element mesh of low-resolutional digital image. This element is able not only to represent the strain jump caused by the existence of different materials but also to capture the displacement jump caused by interfacial cracks. A two-dimensional numerical example is shown.

Keywords: concrete materials, composite materials, coarse-aggregate-and-mortar interface, digital image processing, mathematical morphology, mixed finite element method

コンクリート材料, 複合材料, 粗骨材-モルタル界面, デジタル画像処理, モルフォロジー, 混合型有限要素法

1. 序論

コンクリート材料は様々な材料をセメントペーストにより一体化させた材料であり、その強度発現の根源はセメントペースト水和物の分子間力などによる材料間の付着であると考えられている¹⁾²⁾。また、その非線形力学挙動は、微視的な視点において、材料間の付着や材料自身が引張により破壊されることで生じるひび割れの累積に起因すると考えられている³⁾⁴⁾。本研究の目的は、このように本質的な破壊形態であると考えられている引張破壊の視点から、構造物レベルの視点において観察されるコンクリート材料の圧縮破壊現象を、数値解析的に説明することである。

この目的のためには、コンクリート材料を均質材料ではなく複合材料として取り扱い、応力の不均一性に起因する局所的な引張破壊を考慮することが必須である。このとき、様々なスケールの構成材料からなる多相複合材料であるコンクリート材料を、粗骨材とモルタルからなる2相複合材料と仮定することが多い⁵⁾⁸⁾。しかしながら、有限要素法を用いて解析する場合には、粗骨材-モルタルの幾何学構造を有限要素に分割することは、特に三次元の場合には極めて困難となる。この問題に対して既に筆者等⁹⁾は、実際のコンクリート材料の三次元デジタル画像を直接に用いた粗骨材-モルタル構造の三次元有限要素解析手法を提案し、第一に

行った線形解析の結果から本解析手法の有用性を確認している。

ところで、普通コンクリートの場合、粗骨材-モルタル界面には、疎な結晶構造をもつ薄層の遷移帯が存在していることが知られている。これが脆弱であることから、特に粗骨材-モルタルの付着が問題となり、コンクリート材料の非線形力学挙動を支配する主要因のひとつであると考えられている²⁾¹⁶⁾。ひび割れの総延長を指標としたときに、粗骨材-モルタル界面の引張破壊は非線形挙動の初期段階ばかりでなく、圧縮強度に至るまでモルタル内部の引張破壊より先行し続けることも報告¹⁷⁾されている。したがって、コンクリート材料の局所的な引張破壊を考慮する場合には、粗骨材-モルタル界面の引張破壊挙動を評価することは重要であると考えられる。細骨材-セメントペースト界面の引張破壊については、粗骨材に比べて細骨材は小さいために寸法効果が期待できて相対的に強度が増すことから、評価する必要はないと考える。これは、同一水セメント比のコンクリート材料において、粗骨材の最大径が大きいほど圧縮強度が低下するという実験的事実¹⁸⁾¹⁹⁾に対応している。

このような現象の考察から、コンクリート材料を粗骨材とモルタルの2相複合材料と仮定した研究の多くは、有限要素法を用いたアプローチを行う場合には、粗骨材-モルタル界面の引張破壊を

注) 本研究の一部は、既に文献10)~15)において発表している。

* 東京工業大学総合理工学研究科環境物理学専攻
大学院生・修士(工学)

** 東京理科大学工学部建築学科 助教授・学博

*** 東京工業大学建築物理研究センター 教授・工博

Graduate Student, Dept. of Environmental Physics and Engineering,
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of
Technology, M. Eng.

Assoc. Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Science University of
Tokyo, Ph. D.

Prof., Structural Engineering Research Center, Tokyo Institute of Technology,
Dr. Eng.

Goodman の接合要素²⁰⁾などの離散ひび割れモデル⁹⁾や、薄い有限要素層を設けて仮想ひび割れ帯とする分散ひび割れモデル⁶⁾⁻⁸⁾によって評価している。一方で、既報⁹⁾で提案したデジタル画像に基づく三次元有限要素解析手法は線形問題に限定していたので、本解析手法を非線形問題に適用するためには、粗骨材-モルタル界面を考慮する必要がある。しかしながら、本解析手法では固定格子により要素分割を行うことから、任意形状の物体は境界において必ず階段状に離散近似された幾何学形状となり、任意の位置で任意の方向を向いた界面を精度良くモデル化することは困難となる。そこで本論文では、三次元非線形有限要素解析への適用を目的として、粗骨材-モルタル界面を精度良くモデル化する手法を、二次元平面ひずみ問題を例として述べるものである。

本論文の構成は次に示す通りである。すなわち、第2章において、低解像度なデジタル画像を固定格子による有限要素分割とみなし、粗骨材-モルタル界面が存在するところのみ高解像度なデジタル画像を埋め込んだ階層型デジタル画像を定義する。第3章において、モルフォロジー理論²¹⁾⁻²³⁾による画像解析手法を主に用いて、実際のコンクリート材料のデジタル画像から階層型デジタル画像を作成する手法を述べる。第4章において、高解像度なデジタル画像を埋め込んだ有限要素に対して、非適合モードとして図1に示す ramp 関数と Heaviside 関数を用いて、同一要素中で粗骨材とモルタルを表現できるばかりでなく粗骨材-モルタル界面のひび割れも表現できる混合型の弱定式化を行う。第5章において、平面ひずみ問題の非線形計算例を示す。第6章は結論である。

2. デジタル画像に基づく有限要素解析手法の概念の拡張

デジタル画像に基づく有限要素解析手法^{24),25)}の概念を図2に示す。この解析手法は、デジタル画像処理により粗骨材部分を1として残りのモルタル部分を0とした2値画像について、1画素をそのまま1有限要素とみなすことにより均一な直交固定格子上でまったく同一形状な要素に分割し、有限要素解析を行うものである。通常、すべての要素形状は二次元の場合には4節点正方形、三次元の場合には8節点立方体となる。このことから明らかなように本解析手法は、従来の手法では有限要素分割が極めて困難であった複雑な三次元幾何学構造を有する対象物に対しても、対象物の適切なデジタル画像を得ることさえできれば、一律かつ容易に要素分割を行うことができるという長所を持っている。その他にも直交固定格子を用いることから、連立一次方程式の求解に高効率な前処理を施した反復解法が適用可能であること、プログラムの並列計算機への実装が比較的容易であることなど、多くの数値解析上の長所²⁶⁾を持っている。

このような長所を持つデジタル画像に基づく有限要素解析手法を三次元非線形問題へ適用することを目的として、粗骨材-モルタル界面のひび割れをモデル化することを考える。まず離散ひび割れモデルは、重複節点を用いることから要素分割の位相の変更が不可避となるために、本解析手法には適さないと考えられる。次に分散ひび割れモデルを用いることを考える。ここで、仮想ひび割れ帯の幅 h と有限要素の代表長さ L の大小関係に着目した Belytschko ら²⁷⁾の分類法を用いて説明する。彼らは、 $h>L$, $h=L$, $h<L$ の場合を、それぞれ *super-h*, *iso-h*, *sub-h* と呼んでいる。最も簡単

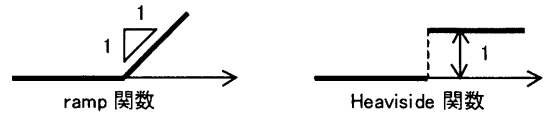


図1 有限要素の非適合モード関数

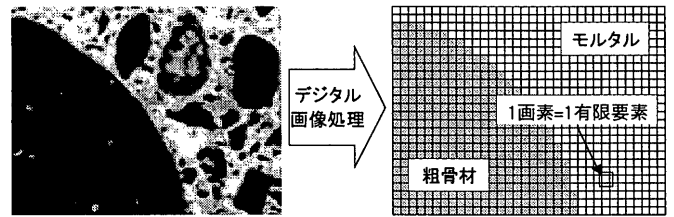


図2 デジタル画像に基づく有限要素分割手法

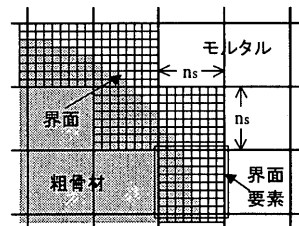


図3 階層型デジタル画像表現

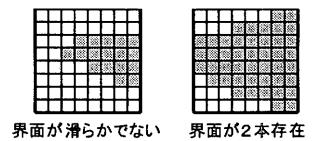


図4 不良な界面要素の例

なモデル化方法は、1要素幅で界面ひび割れを表現する *iso-h* である。しかしながら、*iso-h* では要素分割方向への依存性や、変位の適合条件による変形のロックが指摘²⁸⁾されていることから、これを用いることは好ましくない。また、いくつかの要素幅で界面ひび割れを表現する *super-h* は、非局所理論を用いて取り扱うことができるが、もともと非常に多くの自由度を持った本解析手法がますます大規模になるので実用的でない。

一方で、*sub-h* に属する要素として、'80年代の終わりから軟化材料のひずみや変形の局所化による不連続性を高精度に扱うために、不連続要素と呼ばれる混合要素が数多く提案^{27),29)-32)}されており、その多くを Jirásek³³⁾が一覧にしている。これらは、非適合変形モードとして ramp 関数を付加、もしくは仮想ひび割れ帯の幅 h を $h \rightarrow 0$ の意味において正規化あるいは $h=0$ として Heaviside 関数を付加したものである。これらの要素は、要素サイズと要素分割方向に対する依存性はほとんどないことが示されている。

これらの要素は要素内部で不連続面の位置を問わないことから本解析に应用すれば、粗骨材-モルタルの幾何学構造を直交固定格子の要素分割に一切依存せずに定義できると考える。すなわち、デジタル画像に基づく有限要素解析手法^{24),25)}の概念を素直に拡張すれば、粗骨材-モルタル界面は、図3に示すようにそれを含む有限要素にのみ、部分的に $n_x \times n_y$ 画素からなる高解像度なデジタル画像を埋め込んで表現することになる。本論文では、要素内部に粗骨材・モルタル・粗骨材-モルタル界面を含むこのような有限要素を、界面要素と呼ぶことにする。したがって、有限要素分割の作成のために用いるべき画像は2層階層型のデジタル画像であり、このための画像処理手法が重要となる。

3. 階層型デジタル画像に基づく有限要素分割手法

次章で界面要素の弱定式化を行うために、粗骨材-モルタル界面は十分滑らかでかつ要素内に一本しか存在しないという幾何学

的な条件を仮定する。一方で、実際のコンクリート材料のデジタル画像を直接に用いて界面要素を含む固定格子を作成する場合、この幾何学的な与条件を必ずしも満たさないことは明らかである。例えば、図4に示すように要素内に界面が2本存在したり、滑らかではない界面要素などが考えられる。このような界面要素は、数値解析上の性能を期待できないばかりでなく、悪影響を及ぼす可能性がある。この幾何学形状の問題解決については、一種の集合論であるモルフォロジー理論²¹⁾⁻²³⁾に基づく画像変形手法が有効である。モルフォロジー理論は、二次元・三次元を問わずまったく同一であるので、次に二次元の場合を述べる。

3.1. モルフォロジー理論の概要²¹⁾⁻²³⁾

モルフォロジー理論は、次の Minkowski 和と呼ばれる集合演算の定義を基礎とする。

$$X \oplus B = \{ x+b : x \in X, b \in B \} \tag{3.1}$$

ここに、集合 X を変形対象とする 2 値画像としたとき、集合 B は構成要素²¹⁾と呼ばれている。集合 B の平行移動を $B_x = \{ b+x : b \in B \}$ とすれば、Minkowski 和は次のようにも記述できる。

$$X \oplus B = \bigcup_{x \in X} B_x \tag{3.2}$$

つまり、Minkowski 和とは、図5に示すように「 B の原点を X 内へ移動させたときに B が覆うことのできる領域」²³⁾である。デジタル画像の場合、Minkowski 和は画像間の畳み込み演算となるので、そのプログラムへの実装は対象とする次元を問わずに容易である。

集合 X の補集合を X^c とすれば、 X と X^c の双対性から次の Minkowski 差と呼ばれる集合演算が定義される。

$$X \ominus B = (X^c \oplus B^c)^c \tag{3.3}$$

集合 B の原点に関する反転を $B^c = \{-b : b \in B\}$ とすると、これらの和と差に関する集合演算を用いて、次の4つの基本的な演算が構成される。

$$\text{dilation (ずらし重ね)} \quad X \oplus B^c \tag{3.4a}$$

$$\text{erosion (掻き取り)} \quad X \ominus B^c \tag{3.4b}$$

$$\text{opening} \quad X_B = (X \ominus B^c) \oplus B \tag{3.4c}$$

$$\text{closing} \quad X^B = (X \oplus B^c) \ominus B \tag{3.4d}$$

直感的には、dilation は膨張、erosion は収縮、opening は内からの平滑化、closing は外からの平滑化フィルタであると理解できる。

opening に関して、 $X_B = X$ である集合 X は B -open であると言われ、

$$X = \bigcup B_x \tag{3.5}$$

と記述できる。つまり、 B -open な集合 X は構成要素 B の dilation で構成できる。同様に closing に関しても、 $X^B = X$ である集合 X は B -closed とされる。このとき双対性から、

$$X^c = \bigcup B_x^c \tag{3.6}$$

と記述できる。

3.2. モルフォロジー理論による階層型デジタル画像の定義

2 値画像で表される粗骨材の集合を X とし、粗骨材-モルタル界面を粗骨材側の境界画素で定義することにする。このとき、界面の集合は、図6.1に示す2種類の構成要素を用いて次式に示す2通りの表現ができる。

$$I_4 = X - (X \ominus B_{sq}) \tag{3.7a}$$

$$I_8 = X - (X \ominus B_{rm}) \tag{3.7b}$$

ここに、界面の集合 I_4, I_8 はそれぞれ図6.2に示すような4,8-連結な画素の集合であり、常に $I_4 \supset I_8$ である。

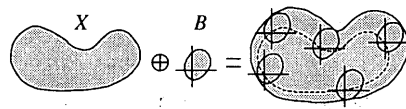


図5 Minkowski 和

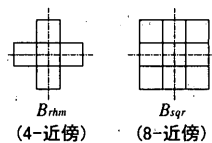


図6.1 構成要素 B_{rm}, B_{sq}

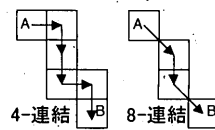


図6.2 連結性

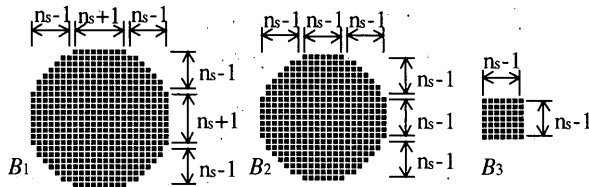


図7.1 構成要素 B_1, B_2, B_3

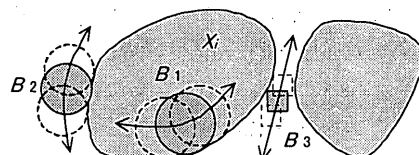


図7.2 モルフォロジー理論によるデジタル画像処理

界面要素の埋め込み画像を $n_x \times n_y$ 画素とすると、各々の粗骨材を表す集合 X_i を図7.1に示す凸集合 B_1, B_2 を用いて平滑化し、 B_1 -open かつ B_2 -closed とすることができれば、すべて滑らかな界面を含む要素分割となる。すなわち、 B_1 -open かつ B_2 -closed な各々の粗骨材を表す集合 X_i の境界は、図7.2に示すように内側からは集合 B_1 によって、また外側からは集合 B_2 によって決定されるので、界面の曲率は B_1, B_2 の曲率を超えることはない。さらに、すべての粗骨材の論理和集合 $X = \bigcup X_i$ を B_3 -closed とすることができれば、界面要素には一本の界面しか含まなくなる。すなわち、すべての粗骨材集合 X の補集合 X^c はモルタルであり、これを集合 B_3 のずらし重ねにより埋め尽くすことのできるため、粗骨材間の距離は n_x より大きくなることが保証される。

これらの構成条件を満たす粗骨材集合 X について、階層型デジタル画像による固定格子作成を行う。具体的には界面要素を、界面の集合 I_4, I_8 から構成される有限要素の集合 IE_4, IE_8 を用いて、次のように構成し、4-連結の有限要素の集合とする。

$$IE_8 \cup (IE_4 \cap (IE_8)^c) \tag{3.8}$$

これは、粗骨材集合内部に位置する有限要素節点とモルタル集合内部に位置する有限要素節点は、必ず界面を介した力の伝達を行うことを保証するものである。

3.3. 画像処理手順

画像処理による固定格子作成の例として、文献9)でスキャンした 768x768 画素からなる 9.6cm 四方のコンクリート材料の RGB (赤・緑・青) マルチチャンネルカラー画像を用いる。このカラー画像の R チャンネル画像を図8.1に、文献9)の方法による2値化画像を図8.2に示す。この2値化画像に対して、モルフォロジーを主とした画像処理を行う。本例題では、界面要素の埋め込み画素数を $n_x=8$ とした。画像処理手順を次に示す。

1) 個々の連結集合に名前を付ける labeling³⁴⁾により小さな孔と粒

子を削除する前処理

- 2) B_1 -opening を行い、粗骨材の集合を内側から平滑化 (図 8.3)
- 3) 個々の粗骨材集合に対して B_2 -closing を行い、外側から平滑化
- 4) すべての粗骨材間の距離を n_s 以上とするために、モルタル集合に対して幾何学的な位相を保ったまま細線化³⁵⁾して中心線を求めた後、 B_3 -dilation (図 8.4)
- 5) 3)と 4)で得られた画像の論理積を算出
- 6) 5)の処理で粗骨材集合に突起が生じた可能性があるために、再度 B_1 -opening

ここに、labeling と細線化 (三次元では薄面化) 処理は、発見的手法であるが、三次元画像に対してもいくつかのアルゴリズムが提案³⁶⁾されているので、三次元への展開を阻むものではない。この一連の画像処理は、前節3.2で述べた構成条件満たす修正画像の生成を保証するものではないが、粗骨材は基本的に凸集合で部分的にのみ弱い凹性を示すに留まることから、ほとんどこの構成条件を満たす画像を得ることができると考えられる。この一連の処理手順を経て得られた画像を式(3.8)に従い96×96の有限要素に要素分割したものを、図8.5に示す。これに含まれる界面要素は全要素の約20%であり、この修正画像は前節3.2で述べた構成条件を満たしていることを確認している。

4. 粗骨材-モルタル界面を含む有限要素の混合型弱定式化

本章で示す不連続性を考慮した有限要素の混合型弱定式化の手続きは、従来の不連続要素に対するものと同様であるが、意図している応用という点において従来とは異なったものである。すなわち、これらの研究において付加される不連続な非適合モードはほとんど1種類であり、いずれにしる単純形状の均質材料中のひずみや変形の局所化を扱うことを目的としていた。一方で本論文では、ひび割れを扱うためだけでなく三次元解析領域の幾何学形状と有限要素分割とを分離して、高度に複雑な幾何学形状の問題に適用することを目的としている。

本論文では界面要素の弱定式化は、Simo と Rifai³⁷⁾のひずみ補正型混合法に基づく Oliver^{29),30)}の弱定式化手続きに従う。この弱定式化は、仮想ひび割れ帯の幅 $h \rightarrow +0$ の意味において取り扱うものである。界面要素には、非適合モードとして同一要素中で粗骨材とモルタルを表現するために ramp 関数を、粗骨材-モルタル界面のひび割れを表現するために Heaviside 関数を付加する。この意味において、Garikipati と Hughes³²⁾が提案している、有限要素レベルで表現できない現象を非適合変形モードとして ramp 関数と Heaviside 関数を考慮してサブスケールで扱うという視点に類似している。本章で示す混合型弱定式化は二次元・三次元を問わずまったく同一であるので、ここでは二次元の場合を考える。

4.1. 変位場の定義

図 9 に示すように、粗骨材とモルタルの領域を、それぞれ Ω^- と Ω^+ で表す。この粗骨材-モルタル界面を十分に滑らかであると仮定して、 S で表して単位法線ベクトル n で定義する。解析領域 $\Omega^- \cup \Omega^+$ に直交固定格子による有限要素分割を重ね合わせたとき、界面 S を含む有限要素つまり界面要素の4-連結集合を Ω_b で表す。 Ω_b は、 S を境として粗骨材領域 Ω^- とモルタル領域 Ω^+ に分割するものとする。今、解析対象領域 $\Omega^- \cup \Omega^+$ の変位場を

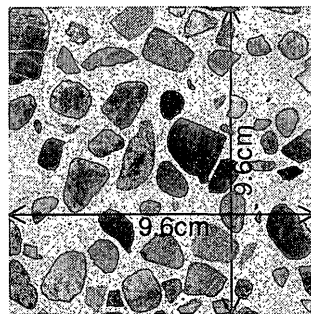


図 8.1 コンクリート断面画像 (R チャンネル)

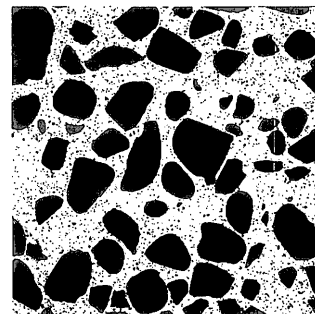


図 8.2 2 値化画像

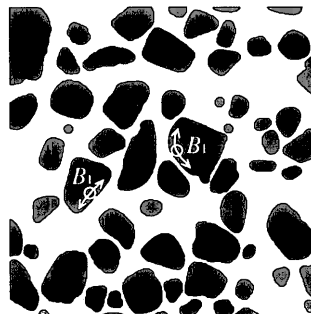


図 8.3 B_1 -open された 2 値画像

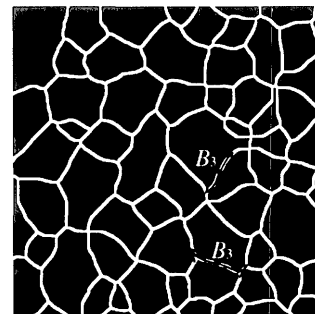


図 8.4 細線化後に B_3 -dilation

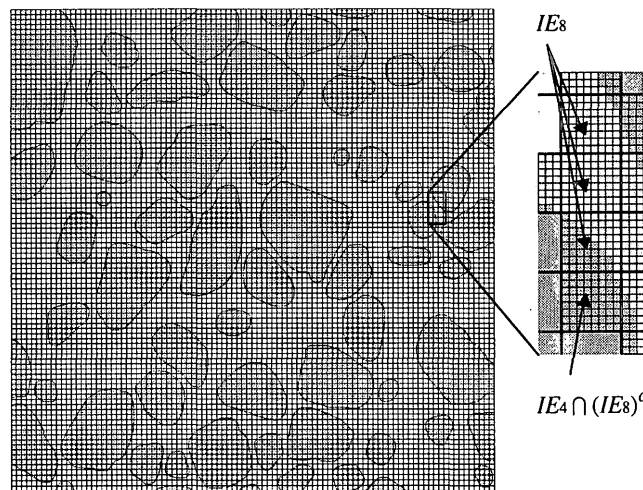


図 8.5 界面要素を含む固定格子による有限要素分割

$$u = \hat{u} + (R_S - \varphi_R)u_R + (H_S - \varphi_H)u_H \quad (4.1)$$

で定義する。ここに、 \hat{u} , u_R , u_H はいずれも滑らかな関数であり、

$$R_S = \begin{cases} 0 & x \in \Omega^- \\ f | f=0 & x \in S, \partial f / \partial n = 1 & x \in \Omega_b \text{ 近傍} \end{cases} \quad (4.2a)$$

$$H_S = \begin{cases} 0 & x \in \Omega^- \\ 1 & x \in \Omega^+ \end{cases} \quad (4.2b)$$

$$\varphi_R = \begin{cases} \text{任意} & x \in \Omega_b \\ R_S & x \in \setminus \Omega_b \end{cases} \quad (4.3a)$$

$$\varphi_H = \begin{cases} \text{任意} & x \in \Omega_b \\ H_S & x \in \setminus \Omega_b \end{cases} \quad (4.3b)$$

である。 R_S , H_S はそれぞれ多次元の ramp 関数と Heaviside 関数である。また、 φ_R , φ_H はともに滑らかな関数であり、それぞれ界面要素集合 Ω_b を除いた領域では R_S , H_S に一致している。したがって、式(4.1)中の $R_S - \varphi_R$, $H_S - \varphi_H$ は、それぞれ界面要素中の粗骨材とモルタルの変位を表現する基底関数、ひび割れを表現する基底関数であり、関数 u_R , u_H はそれらの係数であると解釈できる。

このとき、式(4.1)からひずみ場は、

$$\begin{aligned} \nabla^s u = & \nabla^s \hat{u} + (R_S - \varphi_R) \nabla^s u_R + (H_S - \varphi_H) \nabla^s u_H \\ & + \{H_S(n \otimes u_R)^s - (\nabla \varphi_R \otimes u_R)^s\} \\ & + \{\delta_S(n \otimes u_H)^s - (\nabla \varphi_H \otimes u_H)^s\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

となる。ここに、 ∇ は微分作用素、 δ_S はDiracのデルタ関数であり、 $(\cdot)^s$ は (\cdot) の対称成分であることを表す。

4.2. ひずみ補正型混合法による弱定式化

ひずみ補正型混合法では、ひずみを

$$\varepsilon = \underbrace{\varepsilon_c}_{\text{compatible}} + \underbrace{\tilde{\varepsilon}}_{\text{enhanced}}, \quad \varepsilon_c = \nabla^s u_c \quad (4.5)$$

として、適合変位 u_c によるひずみ ε_c に、初期ひずみと解釈³⁸⁾できる補正項 $\tilde{\varepsilon}$ を付加して考える。式(4.4)において、 u_R, u_H を要素毎に区分定数関数で近似すると、

$$u_c = \hat{u} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} = & \{H_S(n \otimes u_R)^s - (\nabla \varphi_R \otimes u_R)^s\} \\ & + \{\delta_S(n \otimes u_H)^s - (\nabla \varphi_H \otimes u_H)^s\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

と置くことができる。 $x \in \Omega_b$ において $\tilde{\varepsilon} = 0$ であることは明らかであり、通常の有限要素による近似となるので、以後の弱定式化では界面要素のみに注目する。

仮想仕事の原理から、

$$\int_{\Omega} \varepsilon_c^T \sigma(\varepsilon) d\Omega = W_{ext}(u_c^*) \quad (4.8)$$

ここに、 ε_c^* ($=\nabla^s u_c^*$) は重み関数、 $\sigma(\varepsilon)$ は式(4.5)のひずみから求まる応力であり、右辺の W_{ext} は外力に関する項である。

離散化のために、界面 S を界面要素領域 Ω_{be} 毎に一本のみ含まれると仮定し、直線近似して S_e で表す。ここに、下添字 e は界面要素の番号を表す。さらに図10のように、この直線近似界面 S_e の両側に微小な幅 $k_e/2$ で定義される領域を便宜上新たに設けて、それぞれ S_{be}^-, S_{be}^+ で表す。但し、 $S_{be} = S_{be}^- \cup S_{be}^+, \Omega_{be}^- \cap S_{be}^- = \phi, \Omega_{be}^+ \cap S_{be}^+ = \phi$ とする。このとき、 H_S, δ_S を要素毎に次式で近似する。

$$H_{S_e} = \begin{cases} 0 & x \in \Omega_{be}^- \cup S_{be}^- \\ 1 & x \in \Omega_{be}^+ \cup S_{be}^+ \end{cases} \quad (4.9a)$$

$$\delta_{S_e} = \begin{cases} 0 & x \in \Omega_{be}^- \cup \Omega_{be}^+ \\ 1/k_e & x \in S_{be} \end{cases} \quad (4.9b)$$

ここに、上式(4.9b)は $\delta_{S_e} k_e = 1, 0 < k_e \ll 1$ の意味において離散近似している。

滑らかな任意関数である式(4.3a),(4.3b)を、界面要素領域 Ω_{be} で

$$\varphi_{R_e} = \sum_{i=1}^{nodes} N_i R_{S_e i} \quad (4.10a)$$

$$\varphi_{H_e} = \sum_{i=1}^{nodes} N_i H_{S_e i} \quad (4.10b)$$

と構成する。ここに、 N_i は双一次多項式の基底関数である。 $R_{S_e i}, H_{S_e i}$ は、それぞれ要素節点 i における R_{S_e}, H_{S_e} の値であり既値である。

有限要素の補間関数としては、

$$u_{cc}^* = N_c a_c^*, \quad \varepsilon_{cc}^* = B_c a_c^* \quad (4.11)$$

$$u_{ce} = N_c a_c, \quad \varepsilon_{ce} = B_c a_c \quad (4.12)$$

$$\tilde{\varepsilon}_c = G_{Rc} u_{Rc} + G_{Hc} u_{Hc} \quad (4.13)$$

を用いる。ここに、 N_c, B_c は、それぞれ通常の四辺形要素に対する双一次多項式の形状関数マトリクス、ひずみ変換マトリクスである。また、

$$G_{Rc} = H_{S_e} N_c^T - B_c \phi_{Rc} \quad (4.14a)$$

$$G_{Hc} = \delta_{S_e} N_c^T - B_c \phi_{Hc} \quad (4.14b)$$

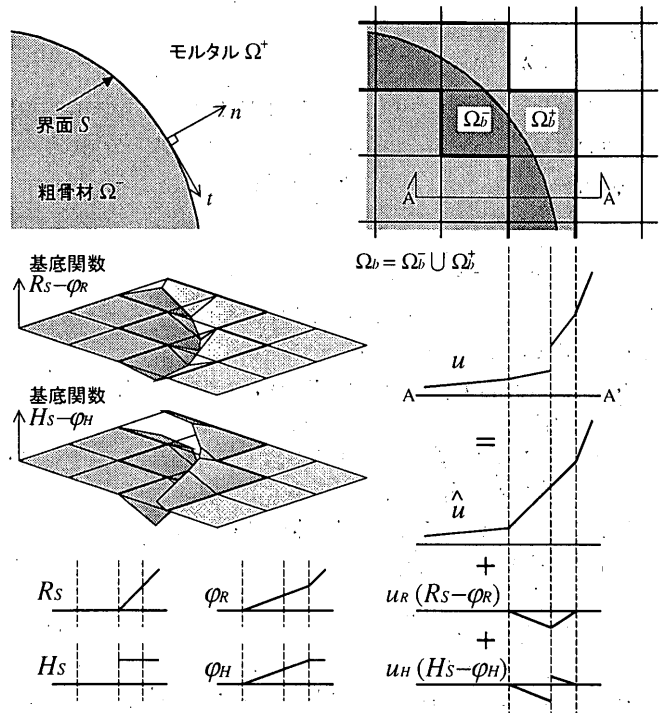


図9 領域と変位場の定義

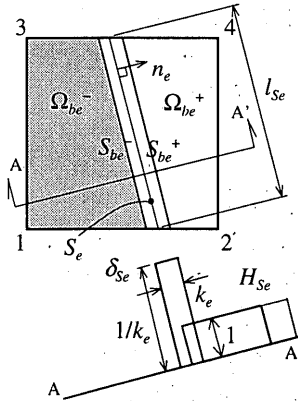


図10 界面要素

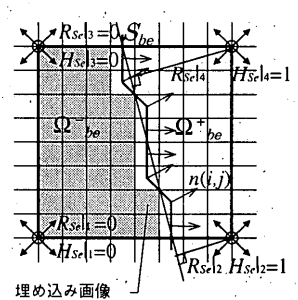


図11 幾何学情報の抽出

$$N_c^T = \begin{bmatrix} n_{cx} & 0 & n_{cy} \\ 0 & n_{cy} & n_{cx} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\Phi_{Rc}^T = [R_{S_e 1} \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad R_{S_e 2} \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad R_{S_e 3} \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad R_{S_e 4} \mathbf{I}_{2 \times 2}] \quad (4.16a)$$

$$\Phi_{Hc}^T = [H_{S_e 1} \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad H_{S_e 2} \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad H_{S_e 3} \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad H_{S_e 4} \mathbf{I}_{2 \times 2}] \quad (4.16b)$$

である。ここに、 \mathbf{I} は単位マトリクスである。

一方で、次の制約条件を課す。

$$\int_{\Omega_{be}} G_{Rc}^T \sigma_c d\Omega = 0 \quad (4.17a)$$

$$\int_{\Omega_{be}} G_{Hc}^T \sigma_c d\Omega = 0 \quad (4.17b)$$

ここに、

$$G_{Rc}^* = (H_{S_e} - |\Omega_{be}^+ \cup S_{be}^+| / |\Omega_{be}|) N_c \quad (4.18a)$$

$$G_{Hc}^* = (\delta_{S_e} - l_{S_e} / |\Omega_{be}|) N_c \quad (4.18b)$$

であり、 $|\cdot|$ は領域の面積を表し、 l_{S_e} は要素内で直線近似された界面の長さである。

制約条件式(4.17)に式(4.18)を代入し、整理すると、

$$\frac{1}{|\Omega_{be}^+ \cup S_{be}^+|} \int_{\Omega_{be}^+ \cup S_{be}^+} N_c^T \sigma_c d\Omega = \frac{1}{|\Omega_{be}^- \cup S_{be}^-|} \int_{\Omega_{be}^- \cup S_{be}^-} N_c^T \sigma_c d\Omega \quad (4.19a)$$

$$\frac{1}{l_{S_e}} \int_{S_e} N_c^T \sigma_c dS = \frac{1}{|\Omega_{be}^-|} \int_{\Omega_{be}^-} N_c^T \sigma_c d\Omega \quad (4.19b)$$

が得られる。ここに、

$$\int_{\Omega_{bc}} f \delta_{sc} d\Omega = \int_{S_c} f dS \quad (4.20)$$

なる関係を用いた。式(4.19)は、界面における表面力の連続条件を平均的に満足することを示している。したがって、制約条件式(4.17)は表面力の連続条件式であることが分かる。また、式(4.18)は、

$$\int_{\Omega_{bc}} \mathbf{G}_{Re}^* d\Omega = \mathbf{0} \quad (4.21a)$$

$$\int_{\Omega_{bc}} \mathbf{G}_{He}^* d\Omega = \mathbf{0} \quad (4.21b)$$

を満たしているため、本有限要素近似は、式(4.17)から一定応力場を表現できることが分かりパッチテストを満足する。

よって式(4.8)、(4.17)などから、界面要素の要素剛性方程式は、

$$\int_{\Omega_{bc}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c^T \mathbf{C}_c \mathbf{B}_c & \mathbf{B}_c^T \mathbf{C}_c \mathbf{G}_{Re} & \mathbf{B}_c^T \mathbf{C}_c \mathbf{G}_{He} \\ \mathbf{G}_{Re}^T \mathbf{C}_c \mathbf{B}_c & \mathbf{G}_{Re}^T \mathbf{C}_c \mathbf{G}_{Re} & \mathbf{G}_{Re}^T \mathbf{C}_c \mathbf{G}_{He} \\ \mathbf{G}_{He}^T \mathbf{C}_c \mathbf{B}_c & \mathbf{G}_{He}^T \mathbf{C}_c \mathbf{G}_{Re} & \mathbf{G}_{He}^T \mathbf{C}_c \mathbf{G}_{He} \end{bmatrix} d\Omega \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_c \\ \mathbf{u}_{Re} \\ \mathbf{u}_{He} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

となる。ここに、 \mathbf{C}_c は要素 e の材料定数であり、 \mathbf{C}_c^- 、 \mathbf{C}_{Se} 、 \mathbf{C}_c^+ をそれぞれ定数変数とした階段関数

$$\mathbf{C}_c = \begin{cases} \mathbf{C}_c^- & x \in \Omega_{bc}^- \\ \mathbf{C}_{Se} & x \in S_{bc} \\ \mathbf{C}_c^+ & x \in \Omega_{bc}^+ \end{cases} \quad (4.23)$$

である。なお、式(4.22)の要素剛性マトリクスは非対称であるが、界面 S_c が要素辺に平行あるいは垂直の場合に限り $\mathbf{G}_{Re} = \mathbf{G}_{Re}^*$ 、 $\mathbf{G}_{He} = \mathbf{G}_{He}^*$ となるので、対称となる。界面要素は、その要素剛性マトリクスを要素毎に独立な非適合変位 \mathbf{u}_{Re} 、 \mathbf{u}_{He} を静的縮約により消去することで、通常の変位法に組み込むことができる。

4.3. 数値積分手法

式(4.22)中の要素剛性の積分は、界面要素中に埋め込まれた高解像度画像を用いてデジタル的に区分積分を行う。区分積分領域は、すべての界面要素は同一形状であることから、積分値は画素数 $n_x \times n_y$ 個だけデータベース化しておけば良い。このときに必要となる各領域の面積 $|\Omega_{bc}^-|$ 、 $|\Omega_{bc}^+|$ 、 $|\Omega_{bc}|$ 、界面の法線 n_c 、長さ l_{Sc} などは、図 11 に示すように、いずれも平易なデジタル幾何学的な処理や最小自乗近似直線により求めることができる。 R_{Sp_i} は直線界面から節点までの距離である。 H_{Sp_i} を用いて決定される基底関数 $H_{Se} - \phi_{He}$ は、図 9 からも明らかなように、適合要素と節点を共有するすべての界面要素で界面 S の接線方向には連続でなければならないので、 H_{Sp_i} は要素節点周りの 4 つの高解像度画素を用いて決定する。

4.4. 固有値解析による要素特性の検証

界面要素の特性を確認するために、図 12 に示すように傾き $-1/1$ の界面が存在する正方形の界面要素を例として、縮約された要素剛性に対して固有値解析を行った。ここでは、2 つの非適合モード \mathbf{u}_{Re} 、 \mathbf{u}_{He} は本質的に同じ性状を示すと予想されることから、ひび割れの非適合モード \mathbf{u}_{He} のみを考える。領域 $\Omega_{bc}^- \cup \Omega_{bc}^+$ と界面 S_c に対するヤング係数はそれぞれ $E=100$ 、 $E_S=1$ 、ポアソン比はともに $\nu=0.2$ とした。固有値解析の結果、開口型ひび割れとせん断型ひび割れに対応すると考えられる固有値・固有変形モードが算出された。それぞれの固有モードにおいて、界面の法線方向変形量と接線方向変形量のうちの 95%、97% は、非適合モードであるひび割れ変位 \mathbf{u}_{He} に起因していた。また、界面の位置と方向を変化させた場合の固有値解析も行ったが、これらのひび割れ変形モードに相当する固有値はほとんど一定であり、要素分割方向への依存性がないことを確認した。界面要素を組み込んだ単純な線形解析モデルにおいても、ひび割れ

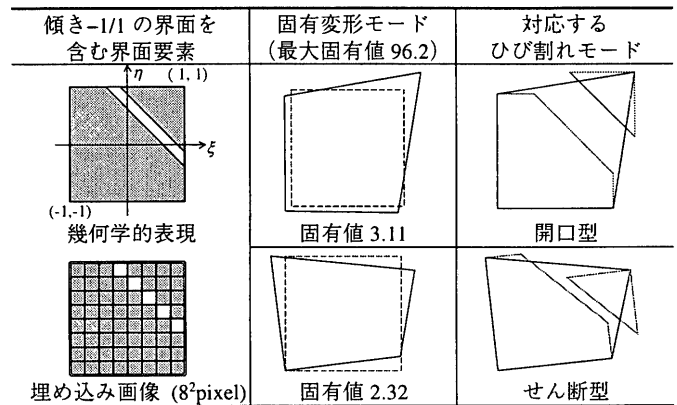


図 12 界面要素の縮約された要素剛性に対する固有値解析

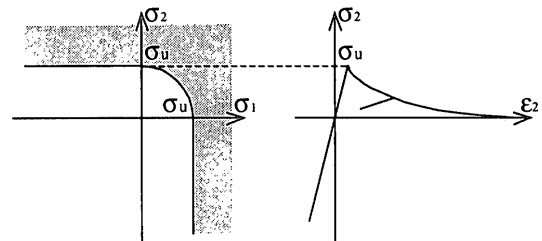


図 13 界面における損傷の発生条件と構成則

表 1 材料定数

	E (GPa)	ν	G_f (J/m ²)	σ_u (MPa)
粗骨材	69	0.20	-	-
モルタル	25	0.20	-	-
界面	25	0.20	4.9	1.2

表現性の確認をしている¹⁰⁾。

5. 非線形数値解析例

5.1. 界面の構成則

界面の引張りひび割れ破壊の構成則として、連続損傷力学に基づく Oliver²⁹⁾ のモデルを用いる。このモデルは、損傷量 d ($0 \leq d \leq 1$) を導入して、構成則を次式で表現するものである。

$$\sigma = (1-d) \mathbf{C} \epsilon \quad (5.1)$$

損傷の発生条件は、 σ_u を一軸引張強度として、界面の主応力が図 13 に示す主応力座標系の着色部に位置した時である。また、主応力座標系の第 3 象限では初期剛性を回復するものとする。引張軟化は、次の式(5.2)~(5.6)で表される破壊エネルギーを考慮した指数関数型のものであり、除荷は原点への線形弾性回復として扱っている。

$$d = \begin{cases} 0 & r < r_0 = \sigma_u / \sqrt{E} \\ 1 - \frac{r_0}{r} \exp(H(r/r_0 - 1)) & r_0 < r \end{cases} \quad (5.2)$$

$$r = \max_{s \in (-\infty, r]} \{r_0, \tau_s^e\} \quad (5.3)$$

$$\tau^e = \sqrt{\sum_1^{\dim} \langle \bar{\sigma}_i \rangle \epsilon_i} \quad \bar{\sigma} = \mathbf{C} \epsilon \quad (5.4)$$

$$\bar{H} = -r_0^2 / G_f \quad (5.5)$$

$$H = \bar{H} k \quad (5.6)$$

ここに、すべての定数と変数は界面において定義されるものであり、 E はヤング係数、 G_f は界面の破壊エネルギー、 $\bar{\sigma}$ は有効応力である。 $\langle \cdot \rangle$ は主応力座標系において引張成分のみを取ることを表す。損傷量 d は、式(5.3)から分かるように過去の最大履歴により決定され、それを越えた場合にのみ増加する単調増加関数である。また、

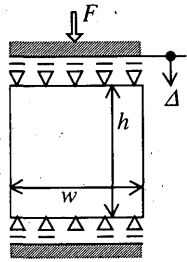


図 14 境界条件

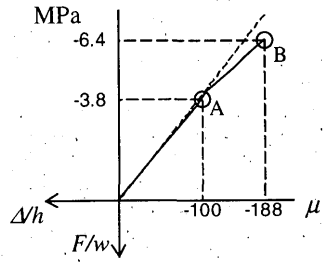


図 15 平均ひずみ-平均応力関係

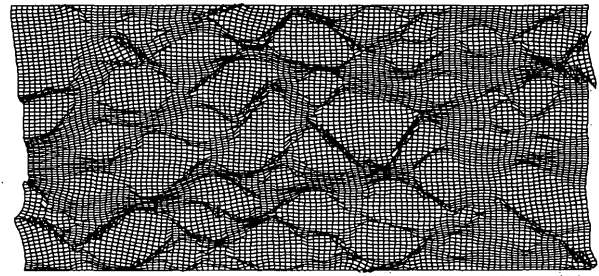


図 17.1 B点における有限要素メッシュの変形 (2500倍)

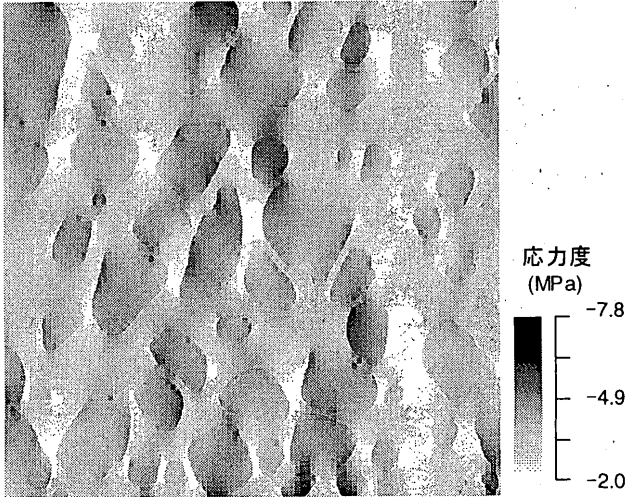


図 16.1 線形範囲内の A 点における最小主応力度分布

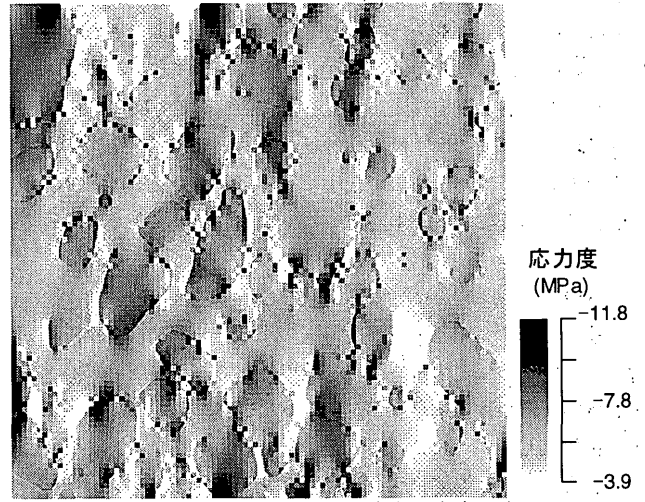


図 17.2 B点における最小主応力度分布

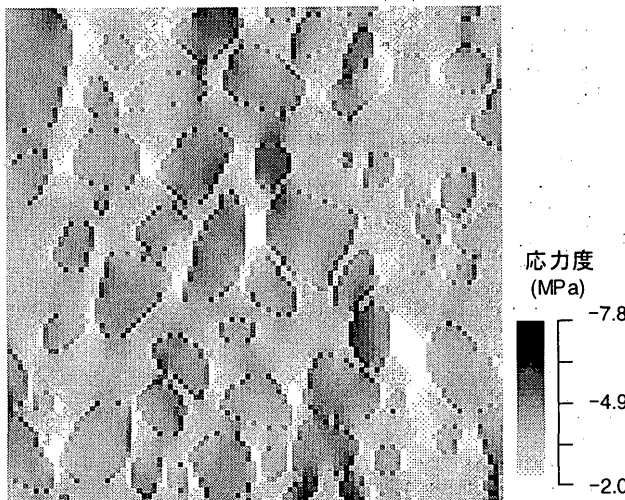


図 16.2 適合有限要素のみを用いた最小主応力度分布 (A点相当)

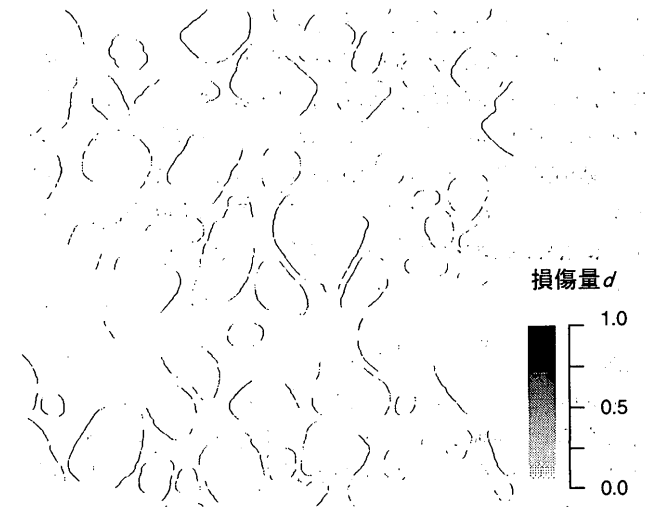


図 17.3 B点における損傷量分布

式(5.5),(5.6)により、引張軟化は界面要素内に定義される微小な仮想ひび割れ帯の幅 k に応じて正規化されている。便宜上、界面内部の応力を評価するが、仮想ひび割れ帯の幅 $k \rightarrow +0$ の極限において不連続変位と表面力の関係に還元されることが Oliver²⁹⁾により示されている。界面要素内部の応力については、粗骨材領域 Ω_{bc}^- 、モルタル領域 Ω_{bc}^+ 、界面領域 S_{bc} でそれぞれ平均して個別に評価する。

5.2. 一軸圧縮の数値解析例

3章で得られた図 8.5 の要素分割モデルを用いて、本論文で提案する解析手法の検討を平面ひずみ問題にて行う。なお、複合材料としてのコンクリート材料の破壊は本質的に三次元であると考え³⁰⁾ので、この平面ひずみ問題としての取り扱いが解析手法検討のためのものである。材料定数は、既往の文献^{31),39)}などを参考

にして表 1 に示すように決定した。界面のヤング係数 E は、数値的な安定のためにモルタルの 99% とした。一般に界面の破壊は混合破壊モードであるため、界面の法線と主応力方向との関係によって破壊エネルギー G_f は変化すると考えられる³⁹⁾が、本例では一定とした。また、界面の摩擦は無視した。境界条件は、図 14 に示すように解析領域の上下面を横方向無拘束として、上面に一律な強制圧縮変位を与えた。非線形方程式の求解法は、軟化を取り扱うものの応力勾配があることから一意な解が得られる可能性が高いと考え、割線剛性法を用いた。

引張側を正として、解析結果を示す。図 15 は鉛直軸方向の平均ひずみ-平均応力関係である。同図中のほとんど線形範囲内である A 点における最小主応力度分布を図 16.1 に示す。また比較の

ために、同条件で適合要素のみを用いた線形解析を行った。この場合の A 点相当の最小主応力度分布を図 16.2 に示す。適合要素のみを用いた場合では、界面を階段状に近似していることから、界面近傍の要素の応力には数値振動が生じている。一方で、界面要素を用いた図 16.1 の場合、界面を滑らかに近似していることから、応力に関して滑らかな数値解が得られている。なお、界面を境として応力が不連続となっているが、界面では表面力は連続であっても一般に応力は不連続であることから、妥当な結果である。

図 15 中の B 点における有限要素メッシュの変形、最小主応力度分布、損傷量分布をそれぞれ図 17.1~17.3 に示す。圧縮変位の増加に伴い、損傷量分布に示すような主に鉛直方向の粗骨材-モルタル界面に引張損傷破壊が生じる結果、鉛直軸方向の平均ひずみ-平均応力関係には剛性劣化が現れていることが分かる。また、若干の界面要素に力学的に不合理な応力振動が生じているが、これが非線形解析に及ぼす影響については今後の検討が必要である。

6. 結論

本論文では、コンクリート材料を粗骨材-モルタルの 2 相複合材料としてモデル化することを出発点として、その圧縮破壊現象を局所的な引張破壊挙動から説明するための非線形有限要素解析手法を提案した。つまり、1)粗骨材-モルタル界面を固定格子の有限要素分割とは無関係に高解像度デジタル画像を要素内に埋め込むモデル化法を提案した後、2)モルフォロジー理論を用いたデジタル画像処理手法を示し、3)不連続性を考慮した混合型の有限要素定式化を行い、4)実際のコンクリート材料の二次元デジタル画像を用いた一軸圧縮の非線形解析例を示した。粗骨材もしくはモルタルの引張破壊のモデル化に対しても、不連続性を考慮した混合型有限要素を用いることができると考える。今後、本論文で提案したデジタル画像に基づく非線形有限要素解析手法を三次元問題に拡張し、コンクリート材料の圧縮破壊問題に適用する予定である。

謝辞

本研究の一部は、平成 10 年度竹中育英会研究助成および平成 11 年度文部省科学研究費補助金によって行われた。また、本論文の筆頭者は日本学術振興会の特別研究員である。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 戸祭邦之：コンクリートの実像 -その性能と性状-, 理工図書, 1999
- 2) 森野奎二：骨材との付着の観点から強度をみる, セメント・コンクリート No. 546, pp. 124-127, 1992.8
- 3) 破壊力学の応用研究委員会：破壊力学の応用研究委員会報告書, 日本コンクリート工学協会, 1993
- 4) Z. P. Bazant and J. Planas : Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials, CRC press , 1998
- 5) 梶川康男, 橋吉宏, 吉田博：骨材-モルタル平面モデルを用いたコンクリートの変形挙動, 土木学会論文集, No. 356/I-3, pp. 369-377, 1985.4
- 6) M.Saito and M.Kawamura : Resistance of the cement-aggregate interfacial zone to the propagation of cracks, Cement and concrete research, Vol. 16, pp. 653-661, 1986
- 7) 椿龍哉：不連続面の回転を考慮した脆性の材料の変形挙動のシミュレーション, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第 19 巻, pp. 165-170, 1995.7
- 8) P. Mark : Numerical simulation of cracking in concrete during tensile loading,

- Proc. EURO-C, Computational modelling of concrete structures, de Borst, Bicanic, Mang & Meschke (eds), Rotterdam, pp. 119-125, 1998
- 9) 永井学志, 山田貴博, 和田章：三次元実画像データに基づくコンクリート材料の有限要素解析手法, 日本建築学会構造系論文集, 第 509 号, pp.77-82, 1998.7
 - 10) 永井学志, 山田貴博, 和田章：固定格子のための滑らかな界面を含む混合型有限要素の開発, 計算工学講演会論文集, Vol.3, 393-396, 1998.5
 - 11) 永井学志, 山田貴博, 和田章：デジタル画像を用いたコンクリート材料の界面ひび割れを表現できる有限要素, 日本建築学会大会学術講演梗概集(九州), pp. 525-526, 1998.9
 - 12) 永井学志, 山田貴博, 和田章：界面破壊を考慮したコンクリート微視構造の非線形解析, 第 48 回理論応用力学講演会, pp. 377-378, 1999.1
 - 13) 永井学志, 山田貴博, 和田章：微視構造の引張破壊を考慮したコンクリート材料の巨視的圧縮挙動の数値解析, 計算工学講演会論文集, Vol. 4, No. 2, pp. 729-732, 1999.5
 - 14) 永井学志, 山田貴博, 和田章：コンクリート材料の圧縮破壊のイメージベース有限要素解析, コンクリート工学年次論文報告集, Vol. 21, No. 3, pp. 157-162, 1999.7
 - 15) G. Nagai, T. Yamada and A. Wada : Stress analysis of concrete material based on geometrically accurate finite element modeling, Fracture Mechanics of Concrete Structures, Proc. FRAMCOS-3, H. Mihashi and K. Rokugo (eds), AEDIFICATIO Publishers, pp. 1077-1086, 1998.10
 - 16) 和泉正哲, 三橋博三, 佐々木達夫：コンクリートの圧縮破壊発生機構に関する基礎的研究, 日本建築学会論文報告集, 第 289 号, pp. 11-24, 1980.3
 - 17) S. P. Shah and S. Chandra : Critical Stress, volume change, and microcracking of concrete, ACI journal, pp. 770-781, 1968.9
 - 18) W. A. Cordon, H. A. Gillespie : Variables in concrete aggregates and Portland cement paste which influence the strength of concrete, pp. 1029-1052, ACI journal, 1963.8
 - 19) 川上英男：粗骨材とコンクリート強度に関する基礎的研究(その 1), 日本建築学会論文報告集, 第 166 号, pp. 19-27, 1969.12
 - 20) 鷲津久一郎 他：有限要素法ハンドブック I 基礎編, 培風館, 1981
 - 21) 間瀬茂, 上田修功：モルフォロジーと画像解析[I], 電子情報通信学会誌, Vol. 74, No. 2, pp. 166-174, 1991.2
 - 22) 上田修功, 間瀬茂：モルフォロジーと画像解析[II・完], 電子情報通信学会誌, Vol. 74, No. 3, pp. 271-279, 1991.3
 - 23) 小畑秀文：モルフォロジー, コロナ社, 1996
 - 24) S.J.Hollister, J.M.Brennan, N.Kikuchi : Homogenization sampling procedure for calculating trabecular bone effective stiffness and tissue level stress, Journal of Biomechanics, 27, No.4, pp.433-444, 1994
 - 25) 関口美奈子, 菊池昇：イメージベース CAE の基本的な考え方, 計算工学講演会論文集, Vol. 4, No. 1, pp. 183-186, 1999.5
 - 26) G. Nagai, T. Yamada and A. Wada : Accurate modeling and fast solver for the stress analysis of concrete materials based on digital image processing technique, Int. J. Comp. Civil and Struct. Eng., inaugural issue (to appear)
 - 27) T. Belytschko, J. Fish and B. E. Engelmann : A finite element with embedded localization zones, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 70, pp. 59-89, 1988
 - 28) J. G. Rots : Computational modeling of concrete fracture, Doctoral thesis, Delft university of technology, Delft, The Netherlands
 - 29) J. Oliver : Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part I: fundamentals, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 39, pp. 3575-3600, 1996
 - 30) J. Oliver : Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part II: numerical simulation, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 39, pp. 3601-3623, 1996
 - 31) 呉智深, 町田篤彦, 高東劭：一般的な不連続変形を考慮した混合型有限要素解析法の開発, 土木学会論文集, No. 598/I-44, pp. 149-159, 1998.7
 - 32) K. Garikipati and T. J. R. Hughes : A variational multiscale approach to strain localization -Formulation for multidimensional problems, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. (to appear)
 - 33) M. Jirásek : Embedded crack models for concrete fracture, Computational modelling of concrete structures, de Borst, Bicanic, Mang & Meschke (eds), Rotterdam, pp. 291-300, 1998
 - 34) 周藤安造：医学における三次元画像処理 -基礎から応用まで-, コロナ社, 1995
 - 35) 高木幹雄, 下田陽久 監修：画像解析ハンドブック, 東京大学出版会, 1991
 - 36) 鳥脇純一郎, 横井茂樹：3 次元デジタル画像処理アルゴリズムの基礎, 電子情報通信学会論文集, Vol. J68-D, No. 4, pp. 426-432, 1985.4
 - 37) J. C. Simo and M. S. Rifai : A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 29, pp. 1595-1638, 1990
 - 38) 武田洋：混合型変分原理と高精度有限要素, 計算工学講演会論文集 Vol. 1, pp. 163-166, 1996.5
 - 39) K. M. Lee, O. Buyukozturk and A. Oumera : Fracture analysis of mortar-aggregate interfaces in concrete, J. Eng. Mech., ASCE, Vol. 118, No. 10, pp. 2031-2047, 1992.10

(1999年5月10日原稿受理, 1999年8月27日採用決定)